

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

**Методические материалы для председателей и членов
предметных комиссий субъектов Российской Федерации
по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом
экзаменационных работ ЕГЭ 2026 года**

МАТЕМАТИКА

Руководитель комиссии по разработке контрольных измерительных материалов, используемых при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике, И.В. Яценко, в.н.с. Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений».

Авторы: И.В. Яценко, П.И. Самсонов, А.В. Семенов, А.С. Трепалин, М.А. Черняева.

Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2026 г. по математике подготовлены в соответствии с Тематическим планом работ федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений». Пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию выполнения заданий с развёрнутым ответом, которые являются частью контрольных измерительных материалов (КИМ) для сдачи единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня.

В методических материалах характеризуются типы заданий с развёрнутым ответом, используемые в КИМ ЕГЭ по математике, и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом, приводятся примеры оценивания выполнения заданий и даются комментарии, объясняющие выставленную оценку.

В пособии использованы работы участников ЕГЭ 2019–2025 гг.

Авторы будут благодарны за замечания и предложения по совершенствованию пособия.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. Критерии проверки и оценка решений задания 13	5
2. Критерии проверки и оценка решений задания 14	37
3. Критерии проверки и оценка решений задания 15	83
4. Критерии проверки и оценка решений задания 16	111
5. Критерии проверки и оценка решений задания 17	146
6. Критерии проверки и оценка решений задания 18	180
7. Критерии проверки и оценка решений заданий 19	227

ВВЕДЕНИЕ

Общие позиции и характер оценивания выполнения заданий в целом повторяют прошлогодние. Небольшие видоизменения и корректировки формулировок в содержании критериев оценивания для конкретного задания могут быть в тех случаях, когда необходимость подобного рода уточнений диктуется содержанием и структурой самого задания.

Более подробное описание заданий с развёрнутым ответом и критериев оценивания их выполнения представлены ниже, в начале каждого из параграфов 1–7.

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 04.04.2023 № 233/552, зарегистрирован Минюстом России 15.05.2023 № 73314)

«81. Проверка экзаменационных работ включает в себя:

1) проверку и оценивание предметными комиссиями ответов на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом <...>, в том числе устных ответов, в соответствии с критериями оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором¹. <...>

По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют первичные баллы за каждый ответ на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом <...>

В случае существенного расхождения в первичных баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в первичных баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором.

По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют первичные баллы за каждый ответ на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в первичных баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в первичных баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о первичных баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения.

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленных двумя экспертами за выполнение заданий 13–19, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 13–19 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

4. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.

¹ Часть 14 статьи 59 Федерального закона от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».

1. Критерии проверки и оценка решений задания 13

Задание № 13 — тригонометрическое, логарифмическое или показательное уравнение.

Выделение решения уравнения в отдельный пункт *a* прямо указывает участникам экзамена на необходимость полного решения предложенного уравнения: при отсутствии в тексте конкретной работы ответа на вопрос пункта *a* задание № 13 оценивается 0 баллов.

Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не степень следования «эталонному» решению.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта <i>a</i> и пункта <i>b</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Комментарий.

Ответ в задании с развёрнутым ответом — это решение и вывод (называемый ответом).

Задача 13 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2026 г.)

а) Решите уравнение

$$2\sin^3 x = \sqrt{2}\cos^2 x + 2\sin x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x \cdot (1 - \cos^2 x) - \sqrt{2}\cos^2 x - 2\sin x = 0; 2\sin x - 2\sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{2}\cos^2 x - 2\sin x = 0;$$

$$2\sin x \cdot \cos^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0; \cos^2 x \cdot (2\sin x + \sqrt{2}) = 0.$$

Значит, $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни,

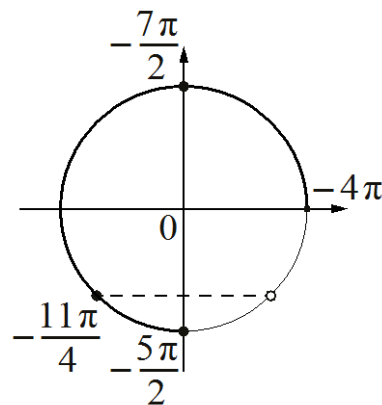
принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } -\frac{7\pi}{2}; -\frac{11\pi}{4}; -\frac{5\pi}{2}.$$



ИЛИ

а) Решите уравнение

$$2 + 2\cos(\pi - 2x) + \sqrt{8}\sin x = \sqrt{6} + \sqrt{12}\sin x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2 - 2\cos 2x + 2\sqrt{2}\sin x = \sqrt{6} + 2\sqrt{3}\sin x;$$

$$2 - 2(1 - 2\sin^2 x) + 2\sqrt{2}\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - \sqrt{6} = 0;$$

$$4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sin x - \sqrt{6} = 0; (2\sin x - \sqrt{3}) \cdot (2\sin x + \sqrt{2}) = 0.$$

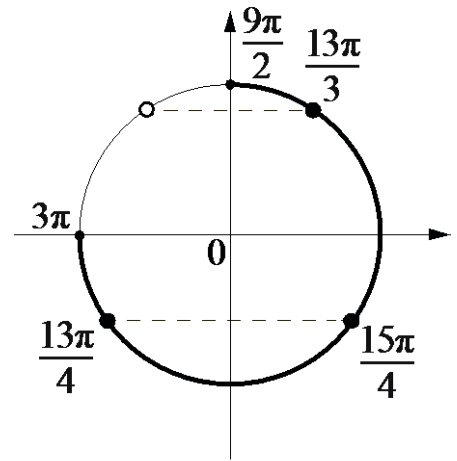
Значит, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $\frac{13\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}; \frac{13\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z};$
 $-\frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$
 б) $\frac{13\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}; \frac{13\pi}{3}$.



Комментарий.

Множество корней может быть записано по-другому.

Отбор корней может быть произведён любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

При отборе корней с помощью числовой (тригонометрической) окружности на числовой окружности должно быть: отмечены и обозначены концы числового отрезка, выделена дуга, отмечены и обозначены корни, принадлежащие данному отрезку. На окружности могут быть отмечены вспомогательные числа, принадлежащие числовому отрезку.

Задание 13.1

а) Решите уравнение

$$1 - \cos 2x + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2 \sin(x + \pi).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$1 - (1 - 2 \sin^2 x) + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2(-\sin x); \quad 2 \sin^2 x - (2 - \sqrt{2}) \sin x - \sqrt{2} = 0;$$

$$(\sin x - 1) \cdot (2 \sin x + \sqrt{2}) = 0.$$

Значит, $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни,

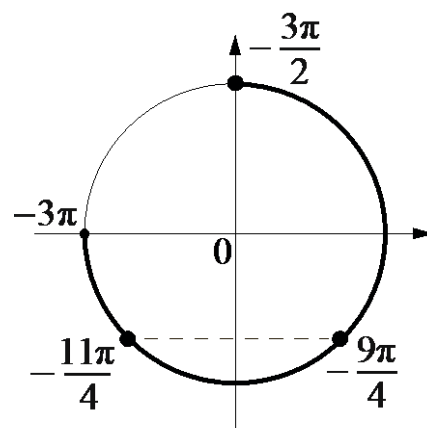
принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{2}$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 13.2

а) Решите уравнение

$$\cos 2x - \sqrt{2} \sin(x + \pi) - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$1 - 2\sin^2 x - \sqrt{2}(-\sin x) - 1 = 0; -2\sin^2 x + \sqrt{2} \sin x = 0; -\sin x \cdot (2\sin x - \sqrt{2}) = 0.$$

Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

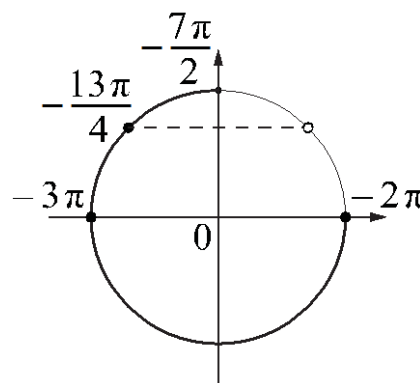
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Получим числа: $-\frac{13\pi}{4}$; -3π ; -2π .

Ответ: а) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } -\frac{13\pi}{4}; -3\pi; -2\pi.$$



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 13.3

а) Решите уравнение

$$\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x \cdot \cos^2 x - \sin x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0; \quad 2\sin x \cdot \cos^2 x + \sqrt{2} \cos^2 x = 0;$$

$$\cos^2 x \cdot (2\sin x + \sqrt{2}) = 0.$$

Значит, $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,
или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

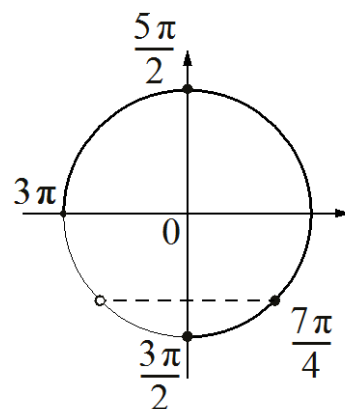
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Получим числа: $\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}.$$



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 13.4

а) Решите уравнение

$$\sin 2x + 2 \sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

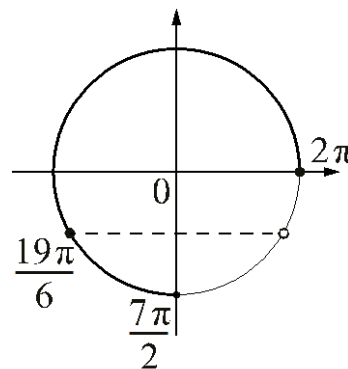
$$2 \sin x \cdot \cos x - 2 \sin x + \cos x - 1 = 0; (\cos x - 1)(2 \sin x + 1) = 0.$$

Значит, $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $2\pi; \frac{19\pi}{6}$.



Ответ: а) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $2\pi; \frac{19\pi}{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 13.5

а) Решите уравнение

$$9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение.

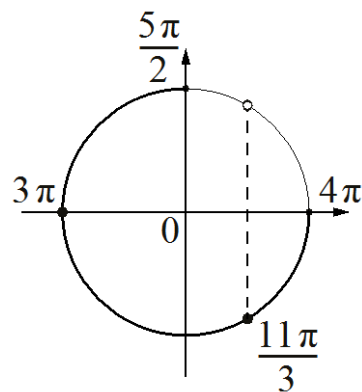
а) Пусть $t = 9^{\cos x}$, тогда уравнение запишется в виде $9t^2 - 28t + 3 = 0$, откуда $t = \frac{1}{9}$ или $t = 3$.

При $t = \frac{1}{9}$ получим: $9^{\cos x} = \frac{1}{9}$; $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

При $t = 3$ получим: $9^{\cos x} = 3$; $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Получим числа: 3π ; $\frac{11\pi}{3}$.



Ответ: а) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) 3π ; $\frac{11\pi}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 13.6

а) Решите уравнение

$$2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Решение.

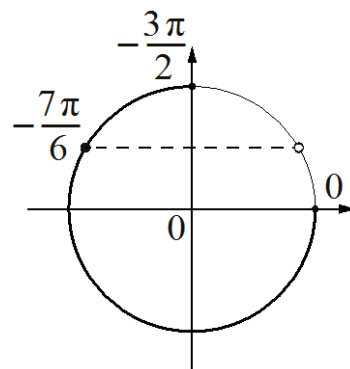
а) Пусть $t = \log_4(4\sin x)$, тогда исходное уравнение запишется в виде $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t = 2$ или $t = \frac{1}{2}$.

При $t = 2$ получим: $\log_4(4\sin x) = 2$, значит, $\sin x = 4$, что невозможно.

При $t = \frac{1}{2}$ получим: $\log_4(4\sin x) = \frac{1}{2}$, значит, $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Получим число $-\frac{7\pi}{6}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{7\pi}{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Примеры оценивания решений задания 13

Пример 13.1.1

а) Решите уравнение $1 - \cos 2x + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2 \sin(x + \pi)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}$.

^{№13}
а)

$$1 - \cos 2x + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2 \sin(x + \pi)$$

$$1 - \cos^2 x + \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2 \cdot (\sin x \cdot \cos \pi + \sin \pi \cdot \cos x)$$

$$1 - 1 + 2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} + 2 \sin x$$

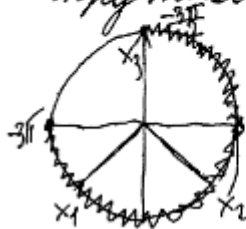
$$2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} - 2 \sin x = 0$$

$$2 \sin x (\sin x - 1) + \sqrt{2} (\sin x - 1) = 0$$

$$(2 \sin x + \sqrt{2})(\sin x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 2 \sin x + \sqrt{2} = 0 \\ \sin x - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = (-1)^k \cdot (-\frac{\pi}{4}) + \pi k; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б). найдём корни с помощью тригонометрической окружности



$$x_1 = -3\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{11\pi}{4}$$

$$x_2 = -2\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{9\pi}{4}$$

$$x_3 = -\frac{3\pi}{2}$$

Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 13.1.2

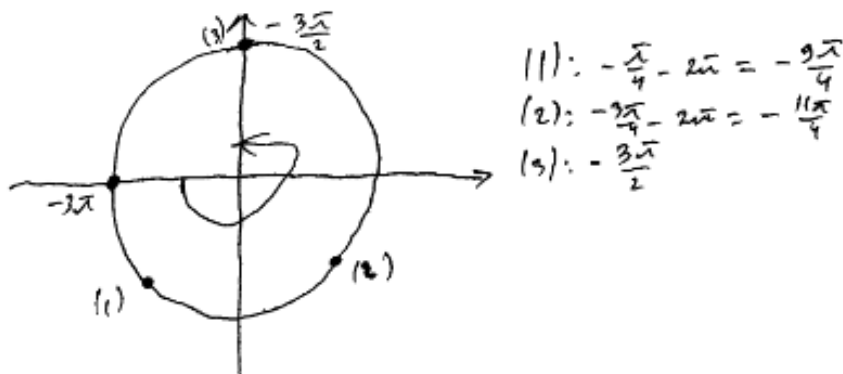
а) Решите уравнение $1 - \cos 2x + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2 \sin(x + \pi)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
 13. \text{ а) } & 1 - \cos 2x + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2 \sin(x + \pi) \\
 & 1 - (1 - 2 \sin^2 x) + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2 \sin x \\
 & 2 \sin^2 x - 2 \sin x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} = 0 \\
 & 2 \sin x (\sin x - 1) + \sqrt{2} (\sin x - 1) = 0 \\
 & (2 \sin x + \sqrt{2}) (\sin x - 1) = 0 \\
 & 2 \sin x + \sqrt{2} = 0 \quad \text{или} \quad \sin x - 1 = 0 \\
 & \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin x = 1 \\
 & x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\
 & x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

б) Проделаю отбор корней на отрезке $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ с помощью единичной окружности:



Ответ. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{11\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2}$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

При отборе корней с помощью числовой (тригонометрической) окружности допущена ошибки: точка -3π на окружности явно обозначена -2π ; корень (1) неверно назван $-\frac{9\pi}{4}$; корень (2) неверно назван $-\frac{11\pi}{4}$. Пункт «б» не выполнен.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.1.3

а) Решите уравнение $1 - \cos 2x + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2 \sin(x + \pi)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

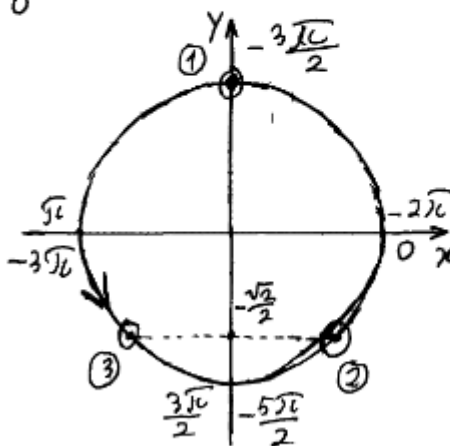
Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}.$

13. a) $1 - \cos 2x + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$

$$1 - \cos^2 x + \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2 \sin \pi \cos x - 2 \cos \pi \sin x$$
$$2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} + 2 \cdot 0 \cdot \cos x + 2 \cdot (-1) \cdot \sin x = 0$$
$$2 \sin^2 x - 2 \sin x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} = 0$$
$$2 \sin x (\sin x - 1) + \sqrt{2} (\sin x - 1) = 0$$
$$(2 \sin x + \sqrt{2})(\sin x - 1) = 0$$
$$\begin{cases} 2 \sin x + \sqrt{2} = 0 \\ \sin x - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} & \textcircled{1} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} & \textcircled{2} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} & \textcircled{3} \end{cases}$$

A unit circle diagram on a Cartesian coordinate system. The circle has radius 1 and center at the origin (0,0). Three points are marked on the circle:

- Point ① is at the top of the circle, corresponding to $(0, 1)$, which is labeled as $\frac{\pi}{2}$ on the y-axis.
- Point ② is in the fourth quadrant, where both x and y coordinates are negative. A dashed horizontal line from the y-axis indicates its y-coordinate is $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. It is labeled as $-\frac{3\pi}{4}$ on the x-axis.
- Point ③ is in the third quadrant, also where both x and y coordinates are negative. It is labeled as $-\frac{5\pi}{4}$ on the x-axis.



д) В промежутке $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$ входят корни $\{-\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}\}$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

Отбор корней с помощью числовой (тригонометрической) окружности не должен приниматься. На числовой (тригонометрической) окружности на рисунке должны быть отмечены (подписаны) начало и конец дуги, выделена рассматриваемая дуга, отмечены (подписаны) корни, принадлежащие этой дуге, при этом на дуге могут быть отмечены дополнительные точки, принадлежащие данной дуге. Пункт «б» не выполнен.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.1.4

а) Решите уравнение $1 - \cos 2x + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2 \sin(x + \pi)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}$.

а) $1 - \cos 2x + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2 \sin(x + \pi)$
 $1 - 1 + 2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2 \sin(\pi + x)$
 $2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x = \sqrt{2} - 2 \sin x$
 $2 \sin^2 x - 2 \sin x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} = 0$
 $2 \sin x (\sin x - 1) + \sqrt{2} (\sin x - 1) = 0$
 $(\sin x - 1)(2 \sin x + \sqrt{2}) = 0$
 $\sin x - 1 = 0 \quad \text{или} \quad 2 \sin x + \sqrt{2} = 0$
 $\sin x = 1 \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$
 1) $-3\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq -\frac{3\pi}{2} \quad /: \pi$
 $-3 \leq \frac{1}{2} + 2n \leq -\frac{3}{2}$
 $-6 \leq 1 + 2n \leq -3$
 $-\frac{7}{2} \leq n \leq -\frac{4}{2}$
 $-3\frac{1}{2} \leq n \leq -2$
 $n = -2 \quad x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$
 $n = -3 \quad x = \frac{\pi}{2} - 3\pi = -\frac{5\pi}{2}$
 2) $-3\pi \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq -\frac{3\pi}{2} \quad /: \pi$
 $-3 \leq -\frac{1}{4} + 2k \leq -\frac{3}{2}$
 $-12 \leq -1 + 8k \leq -6$
 $-\frac{11}{8} \leq k \leq -\frac{5}{8}$
 $k = -1 \quad x = -\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{9\pi}{4}$
 3) $-3\pi \leq -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq -\frac{3\pi}{2} \quad /: \pi$
 $-3 \leq -\frac{3}{4} + 2k \leq -\frac{3}{2}$
 $-12 \leq -3 + 8k \leq -6$
 $-\frac{9}{8} \leq k \leq -\frac{3}{8}$
 $k = -1 \quad x = -\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{11\pi}{4}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}$

Комментарий.

В пункте «а» неверно решено простейшее тригонометрическое уравнение $\sin x = 1$.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 13.2.1

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2} \sin(x + \pi) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{13\pi}{4}; -3\pi; -2\pi$.

$$\sqrt{13.} \cos 2x - \sqrt{2} \sin(x + \pi) - 1 = 0$$

$$a) (1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{2} \sin x - 1 = 0 \quad \sin x = t$$

$$1 - 2t^2 + \sqrt{2}t - 1 = 0$$

$$-2t^2 + \sqrt{2}t = 0$$

$$-t(2t - \sqrt{2}) = 0$$

$$-t(t - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

$$1) t = 0$$

$$2) t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

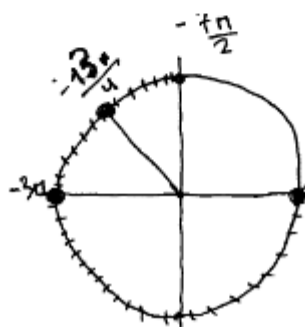
$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$a) x = \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n;$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$d) \text{ отсечем на } \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]; \quad \pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n.$$



$$-\frac{13\pi}{4}; -3\pi; -2\pi$$

$$\text{Ответ: } -\frac{13\pi}{4}; -3\pi; -2\pi$$

Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 13.2.2

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2} \sin(x + \pi) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{13\pi}{4}; -3\pi; -2\pi.$

№ 13

а) $\cos 2x - \sqrt{2} \sin(x + \pi) - 1 = 0$

З-24, 2-го $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, тогда ур-нение будет:

$$\cos 2x - \sqrt{2}(-\sin(x)) - 1 = 0$$

$$\cos 2x + \sqrt{2} \sin(x) - 1 = 0$$

З-24, 2-го $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, тогда

$$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{2} \sin(x) - 1 = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(x) - 2\sin^2 x = 0$$

$$\sin(x) (\sqrt{2} - 2\sin(x)) = 0$$

$$\begin{cases} \sin(x) = 0 & ① \\ \sqrt{2} = 2\sin(x) & ② \end{cases}$$

① $\sin(x) = 0$

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

② $\sqrt{2} = 2\sin(x)$

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k_3, k_3 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ I

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$ II

$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k_3, k_3 \in \mathbb{Z}$ III

д) Буду решать с помощью 1-го нер-ва. т.е.
если $x_0 \in [-\frac{7\pi}{2}; -2\pi] \Rightarrow -\frac{7\pi}{2} \leq x_0 \leq -2\pi$.

Из п.а есть 3 серии решений:

I $x = \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$

II $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$

III $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k_3, k_3 \in \mathbb{Z}$

Ⓘ $x = \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$

$$-\frac{7\pi}{2} \leq \pi k_1 \leq -2\pi \quad | \cdot \frac{1}{\pi} ; 3-4, \text{ т.о. } \frac{2}{\pi} > 0 \Rightarrow \text{знак нер-ва не изменяется}$$

$$-7 \leq 2k_1 \leq -9 \quad | :2$$

$$-3.5 \leq k_1 \leq -2 \quad 3-4, \text{ т.о. } k_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_1 \in \{-2; -3\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2\pi \\ x = -3\pi \end{cases}$$

ⓗ $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$

$$-\frac{7\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k_2 \leq -2\pi \quad | \cdot \frac{4}{\pi} ; 3-24, \text{ т.о. } \frac{4}{\pi} > 0 \Rightarrow \text{знак нер-ва не измен.}$$

$$-14 \leq 1 + 8k_2 \leq -8 \quad | -1$$

$$-15 \leq 8k_2 \leq -9 \quad | :8$$

$$-\frac{15}{8} \leq k_2 \leq -\frac{9}{8} \quad 3-4, \text{ т.о. } k_2 \in \mathbb{Z} \text{ и } -1 > -\frac{9}{8}, \text{ а } -2 < -\frac{15}{8} \Rightarrow$$

$$\text{таких } k_2 \text{ не существует}$$

Ⓣ $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k_3$

$$-\frac{7\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k_3 \leq -2\pi \quad | \cdot \frac{4}{\pi}$$

$$-14 \leq 3 + 8k_3 \leq -8$$

$$-17 \leq 8k_3 \leq -11 \quad | :8$$

$$-\frac{17}{8} \leq k_3 \leq -\frac{11}{8} \quad \text{т.к. } k_3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_3 = -3 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} - 6\pi = -\frac{21\pi}{4}$$

$$\text{Ответ. } \begin{cases} x = -2\pi \\ x = -3\pi \\ x = -\frac{21\pi}{4} \end{cases}$$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

При нахождении целого значения k_3 , удовлетворяющего неравенствам

$-\frac{17}{8} \leq k_3 \leq -\frac{11}{8}$, допущена ошибка: $k_3 = -3$, что привело к неверному ответу в пункте «б».

Пункт «б» не выполнен.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.2.3

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2} \sin(x + \pi) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{4}; -3\pi; -2\pi$.

$$\text{Реш. а) } \cos 2x - \sqrt{2} \sin(x + \pi) - 1 = 0$$

$$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{2} \sin x - 1 = 0$$

$$-2\sin^2 x + \sqrt{2} \sin x = 0$$

$$2\sin^2 x - \sqrt{2} \sin x = 0$$

$$\sin x (2\sin x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\text{I. } \sin x = 0$$

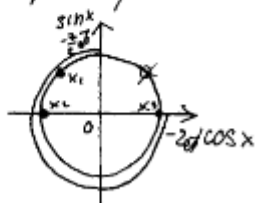
$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{II. } 2\sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

б) Проверим корни с помощью тригонометрической окружности на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$



$$x_1 = -\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{13\pi}{4}$$

$$x_2 = -\pi$$

$$x_3 = -2\pi$$

Ответ а) $x = \pi n; n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$

$$\text{б) } x = -\frac{13\pi}{4} \quad x = -\pi \quad x = -2\pi$$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

Отбор корней с помощью тригонометрической окружности неверный, так как на отмеченной дуге обозначен корень x_2 , не принадлежащий числовому отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$, в ответе неверно записан корень x_1 . Пункт «б» не выполнен.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.2.4

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2} \sin(x + \pi) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{4}; -3\pi; -2\pi$.

№13.

$$а) \cos 2x - \sqrt{2} \sin(x + \pi) - 1 = 0$$

$$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{2} \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x (-2\sin x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \quad \sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$б) x \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$$

$$x = -2\pi; x = -3\pi; x = -\frac{13}{4}\pi$$

$$\text{Ответ: а) } x = \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}; б) x = -2\pi; x = -3\pi; x = -\frac{13}{4}\pi.$$

Комментарий.

В пункте «а» неверно решено простейшее тригонометрическое уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 13.3.1

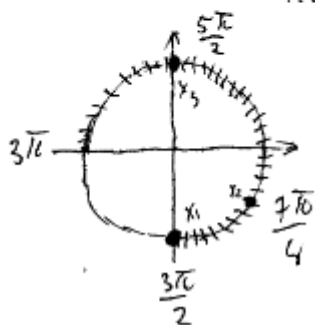
а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0 \\
 & \sin x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) + \sqrt{2} (1 - \sin^2 x) + \sin x = 0 \\
 & \sin x (1 - \sin^2 x - \sin^2 x) + \sqrt{2} (1 - \sin^2 x) + \sin x = 0 \\
 & \sin x (1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{2} (1 - \sin^2 x) + \sin x = 0 \\
 & \sin x + \sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2} (1 - \sin^2 x) = 0 \\
 & 2\sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2} (1 - \sin^2 x) = 0 \\
 & 2\sin x (1 - \sin^2 x) + \sqrt{2} (1 - \sin^2 x) = 0 \\
 & (1 - \sin^2 x) (2\sin x + \sqrt{2}) = 0 \\
 & 1 - \sin^2 x = 0 \quad \text{или} \quad 2\sin x + \sqrt{2} = 0 \\
 & \cos^2 x = 0 \quad \quad \quad 2\sin x = -\sqrt{2} \\
 & x = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \quad \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
 & \quad \quad \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}
 \end{aligned}$$

б) $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ Отберём корни уравнения при помощи окружности;



$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{3\pi}{2} \\
 x_2 &= \frac{7\pi}{4} \\
 x_3 &= \frac{5\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$
 $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$
 $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$
 б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}.$

Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 13.3.2

а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$.

$$а) \sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0.$$

$$\sin x (2 \cos^2 x - 1 + 1) + \sqrt{2} \cos^2 x = 0.$$

$$\sin x \cdot 2 \cos^2 x + \sqrt{2} \cos^2 x = 0.$$

$$\cos^2 x (2 \sin x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\cos^2 x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \sin x = -\sqrt{2}.$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$x = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$б) 1) x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi k \leq 3\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\pi \leq k \leq \frac{5\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = 1 \quad (x = \frac{3\pi}{2}) \quad \text{или} \quad k = 2 \quad (x = \frac{5\pi}{2}).$$

$$2) x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right].$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq 3\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$$\frac{7}{8} \leq n \leq \frac{13}{8} \quad (n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n = 1 \quad (x = \frac{7\pi}{4}).$$

$$3) x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right].$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m \leq 3\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{9}{8} \leq m \leq \frac{15}{8} \quad (m \in \mathbb{Z}) - \text{реш. нет.}$$

$$\text{Ответ: а) } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$б) x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{4}.$$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

При нахождении целого значения n в третьей строчке пункта 2) допущена ошибка.

Пункт «б» не выполнен.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.3.3

а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$.

ш 13

$$\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0$$

$$\sin x (1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0$$

$$\sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0$$

$$2\sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2} \cos^2 x = 0$$

$$2\sin x (1 - \sin^2 x) + \sqrt{2} \cos^2 x = 0$$

$$2\sin x \cdot \cos^2 x + \sqrt{2} \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x (2\sin x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\begin{cases} \cos^2 x = 0 \\ 2\sin x = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

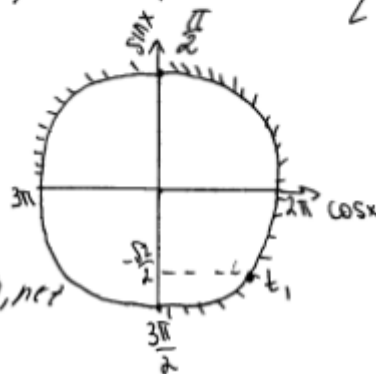
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) отберем корни с помощью

$$t_1 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \text{наш пор. } \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$$

прим. окр-ти, кот в $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$



Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

Отбор корней с помощью тригонометрической окружности неверный, так как на отмеченной дуге обозначен корень, не принадлежащий числовому отрезку. Пункт «б» не выполнен.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.3.4

а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$.

$$\sin x \cos 2x + \sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0, \quad \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$\text{а) } \sin x (1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{2} (1 - \sin^2 x) + \sin x = 0$$

$$\sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2} - \sqrt{2} \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$-2\sin^3 x + \sqrt{2} - \sqrt{2} \sin^2 x + 2\sin x = 0$$

$$-2\sin x (\sin^2 x - 1) - \sqrt{2} (\sin^2 x - 1) = 0$$

$$(\sin^2 x - 1) (-2\sin x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\sin^2 x - 1 = 0$$

или

$$-2\sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$-2\sin x = \sqrt{2}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin^2 x = 1$$

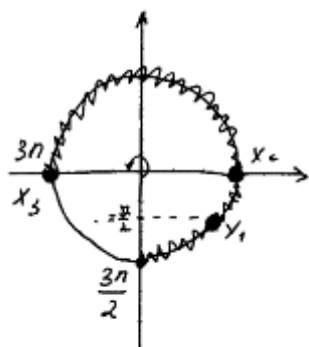
$$\sin x = \pm 1$$

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

б) Отберем корни с помощью тригонометрической окружности на промежутке $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$



Получим корни:

$$x_1 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

$$x_3 = 2\pi + \pi = 3\pi$$

Ответ: а) $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{7\pi}{4}; 2\pi; 3\pi$

Комментарий.

Неверно решены тригонометрические уравнения $\sin x = \pm 1$.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 13.4.1

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; \frac{19\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}
 &\sin(2x) + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0 \\
 &2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) - 2 \cdot \sin(x) + \cos(x) - 1 = 0 \quad \left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right] \\
 &2 \cdot \sin(x) \cdot (\cos(x) - 1) + \cos(x) - 1 = 0 \\
 &(\cos(x) - 1) \cdot (2 \cdot \sin(x) + 1) = 0
 \end{aligned}$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а второй при этом не теряет смысла.

$$\begin{aligned}
 &\cos(x) - 1 = 0 \quad 2 \cdot \sin(x) + 1 = 0 \\
 &\cos(x) = 1 \quad \sin(x) = -\frac{1}{2} \\
 &x = 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \quad x = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Отбор корней:

$$2\pi \leq 2\pi k \leq \frac{7\pi}{2} \quad | : 2\pi$$

$$1 \leq k \leq \frac{7}{4}$$

$$k = 1 \quad x = 2\pi$$

$$2\pi \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{6}{\pi}$$

$$12 \leq -1 + 12k \leq 21$$

$$13 \leq 12k \leq 22$$

$$\frac{13}{12} \leq k \leq \frac{11}{6}$$

$$k \notin \mathbb{Z}$$

$$2\pi \leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{6}{\pi}$$

$$12 \leq -5 + 12k \leq 21$$

$$17 \leq 12k \leq 26$$

$$\frac{17}{12} \leq k \leq \frac{13}{6}$$

$$k = 2 \quad x = \frac{19\pi}{6}$$

Ответ: а) $2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; \frac{19\pi}{6}$.

Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 13.4.2

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; \frac{19\pi}{6}$.

$$а) \sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$$

$$2\sin x \cdot \cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$$

$$(2\sin x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin x = -1 \\ \cos x = 1 \end{array} \right.$$

$$\cos x = 1$$

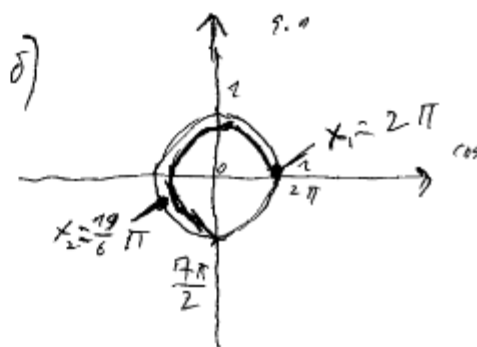
$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi w, w \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi w, w \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Отв: а) } \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi w, w \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$б) x_1 = 2\pi, x_2 = \frac{19\pi}{6}$$



Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 13.4.3

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; \frac{19\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0 \\
 & 2\sin x \cdot \cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0 \\
 & 2\sin x (\cos x - 1) + (\cos x - 1) = 0 \\
 & (\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ 2\sin x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
 \Rightarrow & \begin{cases} x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \\
 \text{б) } & \text{Unit circle diagram showing points } 2\pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{19\pi}{6} \text{ marked on the circle.} \\
 & \sqrt{\frac{2\pi - \frac{5\pi}{6}}{6}} = \frac{12\pi - 5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \\
 \text{Ответ: а) } & \left\{ 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right\} \\
 & \quad n, k \in \mathbb{Z} \\
 \text{б) } & \left\{ 2\pi; \frac{19\pi}{6} \right\}
 \end{aligned}$$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

Отбор корней с помощью тригонометрической окружности неверный, так как на отмеченной дуге указан корень, не принадлежащий числовому отрезку. Пункт «б» не выполнен.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.4.4

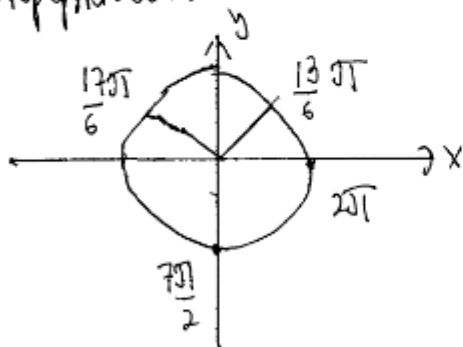
а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; \frac{19\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}
 &\text{а) } \sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0 \\
 &\sin 2x = 2\sin x \cos x, \sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x, \text{ тогда:} \\
 &2\sin x \cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0 \\
 &2\sin x (\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0 \\
 &(2\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0 \\
 &\begin{cases} 2\sin x - 1 = 0 \\ \cos x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0,5 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n_1, n_1 \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n_2, n_2 \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi n_3, n_3 \in \mathbb{Z} \end{cases}
 \end{aligned}$$

б) Отберём подходящие корни, используя единичную окружность



Подходят $2\pi, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n_1, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n_2, x = 2\pi n_3, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$

б) $x = 2\pi, x = \frac{13\pi}{6}, x = \frac{17\pi}{6}$

Комментарий.

Неверное разложение на множители в 5-й строке пункта «а».

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 13.5.1

а) Решите уравнение $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $3\pi; \frac{11\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}
 &9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0 \\
 &9 \cdot (9^{\cos x})^2 - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0 \\
 &9^{\cos x} = t, \text{ тогда} \\
 &9t^2 - 28t + 3 = 0 \\
 &\Delta = 484 - 108 = 376 \\
 &t = \frac{28 \pm \sqrt{376}}{18} \quad t_1 = \frac{1}{9} \quad t_2 = 3 \\
 &9^{\cos x} = \frac{1}{9} \quad 9^{\cos x} = 3 \\
 &9^{\cos x} = 9^{-1} \quad 3^{2\cos x} = 3^1 \\
 &\cos x = -1 \quad 2\cos x = 1 \quad \cos x = \frac{1}{2} \\
 &x_1 = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ объединяя} \\
 &x_1 \text{ и } x_2 \text{ получаем } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\
 &\text{б) } \frac{11\pi}{3}; 3\pi; 4\pi \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right] \\
 &\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}, \text{ б) } 3\pi, \frac{11\pi}{3}, 4\pi.
 \end{aligned}$$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

При отборе корней отсутствует решение и ошибочно указано число, которое не является корнем тригонометрического уравнения. Пункт «б» не выполнен.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.5.2

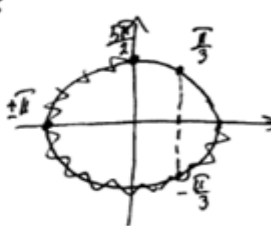
а) Решите уравнение $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $3\pi; \frac{11\pi}{3}$.

а) $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$
 $9 \cdot 3^{4 \cos x} - 28 \cdot 3^{2 \cos x} + 3 = 0$
 Пусть $3^{2 \cos x} = t$, то $9 \cdot t^2 - 28 \cdot t + 3 = 0$
 $D = 784 - 4 \cdot 9 \cdot 3 = 676$
 $t_1 = \frac{28 - 26}{18} = \frac{1}{9}$
 $t_2 = \frac{28 + 26}{18} = 3$
 $3^{2 \cos x} = \frac{1}{9}$
 $3^{2 \cos x} = 3^{-2}$
 $\cos x = -1$
 $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $3^{2 \cos x} = 3$
 $\cos x = \frac{1}{2}$
 $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$
 $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, не подходит.
 1. $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $2,5\pi < -\frac{\pi}{3} + 2\pi k < 4\pi \quad | : \pi$
 $2,5 < -\frac{1}{3} + 2k < 4$
 $2\frac{5}{6} + \frac{2}{6} < 2k < 4\frac{1}{3} \quad | : 2$
 $1\frac{5}{6} < k < 2\frac{1}{3}$
 $\Rightarrow k = 2 \quad x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3}$
 2. $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $2,5\pi < \pi + 2\pi k < 4\pi \quad | : \pi$
 $2,5 < 1 + 2k < 4$
 $1,5 < 2k < 3$
 $0,75 < k < 1,5$
 $\Rightarrow k = 1$
 $x = \pi + 2\pi = 3\pi$
 3. $x = \pi + 2\pi k$
 $2,5\pi < -\pi + 2\pi k < 4\pi \quad | : \pi$
 $1,5 < k < 2,5$
 $\Rightarrow k = 2$
 $x = -\pi + 4\pi = 3\pi$
 Ответ: $x = 3\pi, x = \frac{11\pi}{3}$



Комментарий.

В записи корней первого тригонометрического уравнения содержится дублирующая запись корней, но ошибки в этом нет. Получен верный ответ в пункте «а».

При отборе корней допущены ошибки при делении $2\frac{5}{6}$ и $4\frac{1}{3}$ на 2. Пункт «б» не выполнен.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.5.3

а) Решите уравнение $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $3\pi; \frac{11\pi}{3}$.

$$а) 9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$$

$$9 \cdot (9^2)^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$$

Пусть $9^{\cos x} = t$, тогда:

$$9t^2 - 28t + 3 = 0$$

$$D = (-28)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 3 = 784 - 108 = 676$$

$$t_1 = \frac{28 - 26}{2 \cdot 9} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}; \quad t_2 = \frac{28 + 26}{2 \cdot 9} = \frac{54}{18} = 3$$

Вернемся к замене: $9^{\cos x} = \frac{1}{9}$

$$\cos x = -1 \\ x = \pi + \pi d, d \in \mathbb{Z}$$

$$\text{или } 9^{\cos x} = 3$$

$$(3^2)^{\cos x} = 3^1$$

$$2 \cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$б) \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq \pi + 2\pi n \leq 4\pi; \quad \frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 4\pi$$

$$\frac{5}{2} \leq \frac{1}{3} + 2n \leq 4, n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{5}{2} \leq -\frac{1}{3} + 2k \leq 4, k \in \mathbb{Z}$$

$$2\frac{1}{6} \leq 2n \leq 3\frac{2}{3}, n \in \mathbb{Z}; \quad 2\frac{5}{6} \leq 2k \leq 4\frac{1}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$1\frac{1}{12} \leq n \leq 1\frac{5}{6}, n \in \mathbb{Z}; \quad 1\frac{5}{12} \leq k \leq 2\frac{1}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

n - нет чисел

$$k = 2$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{11\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq \pi + \pi d \leq 4\pi$$

$$\frac{5}{2} \leq 1 + d \leq 4, d \in \mathbb{Z}$$

$$1\frac{1}{2} \leq d \leq 3, d \in \mathbb{Z}$$

$$d = 2, 3$$

$$x_2 = \pi + 2\pi = 3\pi$$

$$x_3 = \pi + 4\pi = 5\pi$$

Ответ: а) $x = \pi + \pi d, d \in \mathbb{Z}; x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$$б) x_1 = \frac{11\pi}{3}; x_2 = 3\pi; x_3 = 5\pi$$

Комментарий.

Неверно решено тригонометрическое уравнение $\cos x = -1$.

Оценка эксперта: 0 баллов.

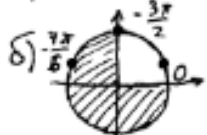
Пример 13.6.1

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

а) $2 \log_4^2(4\sin x) - 5 \log_4(4\sin x) + 2 = 0, \log_4(4\sin x) = t,$
 $2t^2 - 5t + 2 = 0; D = 25 - 16 = 9 = 3^2, t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}; t_2 = \frac{5+3}{4} = 2;$
 $\log_4(4\sin x) = t_1 = \frac{1}{2}; \log_4(4\sin x) = \log_4 2, 4\sin x = 2; \sin x = \frac{1}{2};$
 $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$
 $\log_4(4\sin x) = t_2 = 2; \log_4(4\sin x) = \log_4 4; 4\sin x = 4; \sin x = 1;$
 $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б)  Ответ: $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}.$

Комментарий.

Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки при вычислении t_2 , но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 13.6.2

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{7\pi}{6}$.

а) ОДЗ: $4\sin x > 0$
 $\sin x > 0$

Для любых x решим методом интервалов
 Пусть $\log_4(4\sin x) = t; t > 0$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2$$

$$D = 25 - 16$$

$$D = 9$$

$$t_1 = \frac{5+3}{2} \quad t_1 = 4$$

$$t_2 = \frac{5-3}{2} \quad t_2 = 1$$

Обратная замена

$$\log_4(4\sin x) = 1 \quad \text{или} \quad \log_4(4\sin x) = 4$$

$$4\sin x = 4$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$4\sin x = 256$$

$$\sin x = 64$$

Нет решений.

б) Произведём отбор на единичной окружности



$$-\frac{3\pi}{2}$$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{3\pi}{2}$

Комментарий.

Получены неверные ответы не из-за вычислительной ошибки при нахождении корней квадратного уравнения.

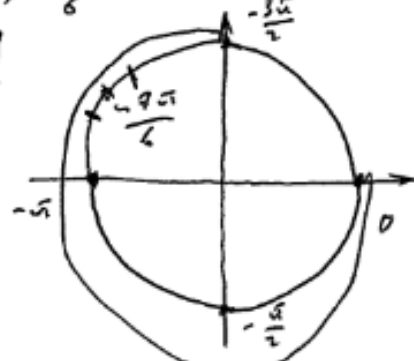
Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 13.6.3

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{7\pi}{6}$.

$2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$ $\log_4(4\sin x) = t$ $0 \leq t \leq 1$
 $2t^2 - 5t + 2 = 0$ $D = 25 - 16 = 9$ $\sin x \neq 0$ $x \neq \pi k$ $n \in \mathbb{Z}$
 $\begin{cases} \log_4(4\sin x) = 2 \\ \log_4(4\sin x) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 4\sin x \\ 2 = 4\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 2 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$
 $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$ $\log_4(4\sin x) = 2 \Rightarrow 4\sin x = 16 \Rightarrow \sin x = 4$
 $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ $t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ $t_2 = \frac{5+3}{4} = 2$

 $\log_4(4\sin x) = 2 \Rightarrow 4\sin x = 16 \Rightarrow \sin x = 4$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
 б) $-\frac{7\pi}{6}$ $n \in \mathbb{Z}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;$ б) $-\frac{7\pi}{6}$.

Комментарий.

При решении простейшего логарифмического уравнения допущена ошибка, которая не является вычислительной, кроме того при нахождении «ОДЗ» допущена ошибка, которая никак не может быть отнесена к вычислительным. Любая из этих ошибок уже не позволяет выставить положительный балл. Типичный пример выставления 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

2. Критерии проверки и оценка решений задания 14

Задание 14 — стереометрическая задача, она разделена на пункты *а* и *б*. В пункте *а* нужно **доказать** геометрический факт, в пункте *б* найти (вычислить) геометрическую величину.

Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не степень следования «эталонному» решению.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>а</i> , при этом пункт <i>а</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задача 14 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2026 г.)

В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N — середины рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α перпендикулярна прямой MN и пересекает ребро BC в точке K .

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна рёбрам AB и CD .

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α , если известно, что $BK = 1$, $KC = 3$.

Решение.

а) В треугольнике ANB имеем: $AN = BN = \frac{\sqrt{3}}{2}CD$.

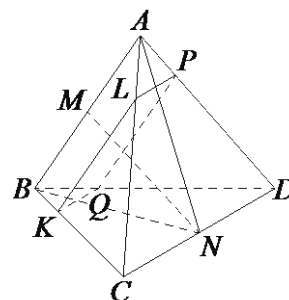
Следовательно, он равнобедренный с основанием AB , а его медиана NM перпендикулярна ребру AB .

Аналогично прямая MN перпендикулярна ребру CD .

б) Плоскость α , перпендикулярная прямой MN , параллельна прямым AB и CD , поскольку эти прямые перпендикулярны прямой MN .

Обозначим точки пересечения рёбер AC , AD и BD с плоскостью α через L , P и Q соответственно. Тогда четырёхугольник $KLPQ$ является прямоугольником, поскольку его стороны KL и PQ параллельны ребру AB , стороны KQ и LP параллельны ребру CD , а прямые AB и CD перпендикулярны.

Треугольники KCL и KBQ равносторонние. Следовательно, $KL = KC = 3$, $KQ = BK = 1$, а площадь прямоугольника $KLPQ$ равна $KL \cdot KQ = 3$.



Ответ: б) 3.

ИЛИ

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ через ребро AB провели плоскость α , образующую сечение $ABMN$, где точки M и N — точки пересечения плоскости α с боковыми рёбрами SC и SD соответственно. Известно, что $AB = BM = AN = 5MN$.

а) Докажите, что точки M и N делят рёбра SC и SD в отношении 1:4, считая от вершины S .

б) Найдите косинус угла между плоскостью основания $ABCD$ и плоскостью α .

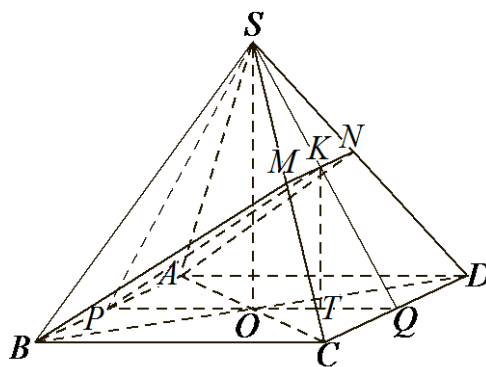
Решение.

а) Прямые AB и CD параллельны, значит, плоскость α параллельна прямой CD . Получаем, что прямая MN , по которой пересекаются плоскости SCD и α , параллельна прямой CD .

Следовательно, $\angle SMN = \angle SCD$ и $\angle SNM = \angle SDC$, значит, треугольники MSN и CSD подобны. Получаем:

$$\frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SD} = \frac{MN}{CD} = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, $SM : MC = SN : ND = 1 : 4$.



б) Обозначим середины рёбер AB и CD точками P и Q соответственно, а точку пересечения плоскости SPQ с отрезком MN — точкой K . Прямые MN и CD параллельны, поэтому $SK : KQ = SM : MC = 1 : 4$.

Плоскость SPQ содержит высоту пирамиды и прямую PQ , перпендикулярную прямой AB . Следовательно, плоскость SPQ перпендикулярна прямой AB , по которой пересекаются плоскости ABC и α , значит, искомый угол равен углу KPQ .

Пусть $MN = 2a$, тогда $AB = BM = AN = 5MN = 10a$. Высота PK равнобедренной трапеции $ANMB$ равна

$$\sqrt{AN^2 - \left(\frac{AB - MN}{2}\right)^2} = 2\sqrt{21}a.$$

В треугольнике SPQ опустим перпендикуляры SO и KT на сторону PQ . Тогда точка O является серединой отрезка PQ , так как SO — высота правильной пирамиды $SABCD$.

По теореме о пропорциональных отрезках $OT : TQ = SK : KQ = 1 : 4$. Поскольку $PQ = BC = 10a$, получаем: $PO = OQ = 5a$; $OT = \frac{1}{5}OQ = a$; $PT = PO + OT = 6a$.

Треугольник KPT прямоугольный, поэтому

$$\cos \angle KPQ = \cos \angle KPT = \frac{TP}{KP} = \frac{6a}{2\sqrt{21}a} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 14.1

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB=1$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α .

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D .

б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC , считая от вершины S , если площадь сечения равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$?

Решение.

а) Прямая BD перпендикулярна прямым SO и AC , лежащим в плоскости ASC . Следовательно, прямая BD перпендикулярна плоскости ASC , а значит, перпендикулярна прямой SC , лежащей в этой плоскости.

Прямая BD проходит через точку O и перпендикулярна прямой SC . Значит, прямая BD лежит в плоскости α . Следовательно, точки B и D лежат в плоскости α .

б) Обозначим точку пересечения плоскости α и ребра SC точкой K . Тогда отрезок OK является высотой треугольника SOC .

Отрезки AC и BD являются диагоналями квадрата $ABCD$. Значит,

$$AC = BD = \sqrt{2} \cdot AB = \sqrt{2} \text{ и } OC = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Площадь m треугольника BKD равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$, значит, $KO = \frac{2m}{BD} = \frac{2}{3}$.

В прямоугольном треугольнике CKO

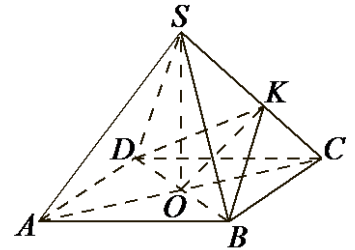
$$CK = \sqrt{CO^2 - KO^2} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Прямоугольные треугольники CKO и OKS подобны, поскольку $\angle COK + \angle KOS = 90^\circ$. Следовательно:

$$\frac{SK}{OK} = \frac{OK}{CK}; SK = \frac{OK^2}{CK} = \frac{4\sqrt{2}}{3}; SK : KC = \frac{4\sqrt{2}}{3} : \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Таким образом, $SK : KC = 8 : 1$.

Ответ: б) 8:1.



Задание 14.2

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра SC , точка K делит ребро BC в отношении $BK:KC = 3:1$, а $AB = 2$ и $SO = \sqrt{14}$.

а) Докажите, что плоскость OMK параллельна прямой SA .

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMK пересекает грань SAD .

Решение.

а) В треугольнике SAC отрезок OM является средней линией, а значит, прямые SA и OM параллельны.

Следовательно, плоскость OMK , содержащая прямую OM , параллельна прямой SA (точка K не лежит в плоскости SAC).

б) Пусть прямая OK пересекает ребро AD в точке L . Тогда треугольники AOL и COK равны, поскольку $\angle LAO = \angle KCO$, $\angle AOL = \angle COK$ и $AO = CO$.

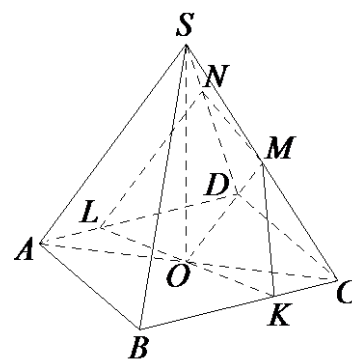
Следовательно: $AL = CK$; $AL:LD = CK:KB = 1:3$.

$$\text{Боковое ребро } SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{SO^2 + \frac{AB^2}{2}} = 4.$$

Обозначим точку пересечения плоскости OMK и прямой SD через N . Прямые SA и NL , содержащиеся в плоскости SAD , параллельны, поскольку плоскость OMK , содержащая прямую NL , параллельна прямой SA . Следовательно, треугольники SDA и NDL подобны

с коэффициентом подобия $\frac{LD}{AD} = \frac{3}{4}$. Значит, $NL = \frac{3}{4} SA = 3$.

Ответ: б) 3.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Задание 14.3

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 2$, а точка K — середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

Решение.

а) Боковая грань $BCC_1 B_1$ призмы параллельна грани $ADD_1 A_1$, поскольку составляющие их рёбра соответственно параллельны. Проведём через вершину C прямую, параллельную KM . Пусть эта прямая пересекает ребро BB_1 в точке N , а продолжение ребра $B_1 C_1$ в точке E ,

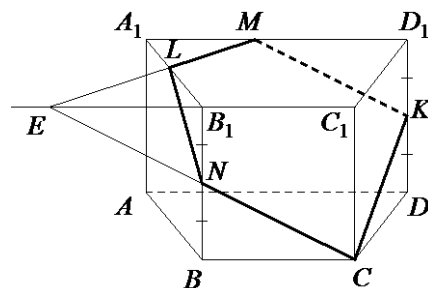


Рис. 1

а прямая EM пересекает ребро $A_1 B_1$ в точке L (рис. 1).

Прямоугольные треугольники CBN и $MD_1 K$ равны, поскольку равны их катеты BC и MD_1 , а также острые углы, ввиду параллельности соответствующих сторон. Следовательно,

$$BN = D_1 K = \frac{1}{2} DD_1 = \frac{1}{2} BB_1,$$

а значит, точка N — середина ребра BB_1 .

б) Пусть высота призмы равна $2x$. Тогда $B_1 N = BN = DK = x$.

В равнобедренной трапеции с основаниями 3 и 2 и углом 60° боковые стороны равны 1, то есть $A_1 B_1 = CD = 1$.

Прямоугольные треугольники $EB_1 N$ и CBN равны по катету и углу при вершине N . Значит,

$$EN^2 = NC^2 = BN^2 + BC^2 = x^2 + 4.$$

Из прямоугольных треугольников CDK и NCK имеем:

$$CK^2 = CD^2 + DK^2 = x^2 + 1; \quad NK^2 = NC^2 + CK^2 = x^2 + 4 + x^2 + 1 = 2x^2 + 5.$$

Для треугольника BCD имеем:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos 120^\circ = 7.$$

Поскольку $NK = BD$, получаем: $2x^2 + 5 = 7$, откуда $x = 1$.

Следовательно, $CK = \sqrt{2}$, $EN = NC = MK = \sqrt{5}$.

Площадь прямоугольной трапеции $MKCE$ равна

$$\frac{1}{2} \cdot CK \cdot (MK + EC) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Треугольники $A_1 ML$ и $B_1 EL$ подобны, значит,

$EL : LM = EB_1 : MA_1 = 2 : 1$, а площади треугольников ELN и EMN относятся как 2 : 3 (рис. 2). Тогда площадь треугольника ELN равна

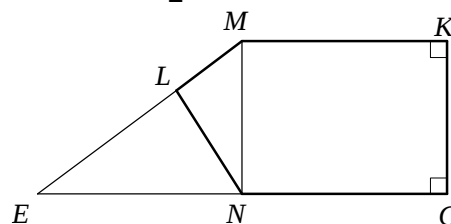


Рис. 2

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Площадь сечения $MKCNL$ равна разности площадей трапеции $MKCE$ и треугольника ELN :

$$\frac{3\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{7\sqrt{10}}{6}.$$

Ответ: б) $\frac{7\sqrt{10}}{6}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задание 14.4

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1 N = 6$.

Решение.

а) Пусть отрезки NB и MC пересекаются в точке E . Прямоугольные треугольники NAB и MBC равны по двум катетам, значит,

$$\begin{aligned}\angle MEB &= 180^\circ - (\angle EMB + \angle EBM) = \\ &= 180^\circ - (\angle EMB + \angle MCB) = 90^\circ.\end{aligned}$$

Отрезок BN — проекция отрезка NB_1 на плоскость ABC . Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.

б) Пусть плоскость α пересекает ребро CD в точке L . Прямые NL и CM , лежащие в плоскости ABC , параллельны, поскольку прямая NL лежит в плоскости α , параллельной прямой CM . Следовательно, $\angle DLN = \angle DCM = \angle BMC$, а значит, прямоугольные треугольники DLN и BMC подобны по острому углу. Получаем:

$$DL = BM \cdot \frac{DN}{BC} = \frac{AB}{2} \cdot \frac{AD}{2BC} = \frac{CD}{4}.$$

Заметим, что $\angle LNB_1 = 90^\circ$, поскольку прямая $B_1 N$ перпендикулярна прямой NL , параллельной прямой CM . Пусть ребро куба равно a . Получаем:

$$36 = B_1 N^2 = AN^2 + AB^2 + BB_1^2 = \frac{9a^2}{4},$$

откуда

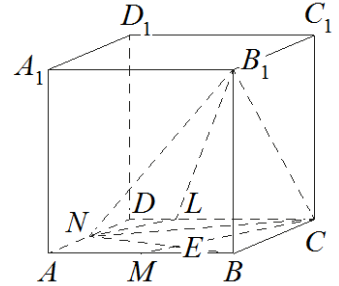
$$a = 4; \quad BB_1 = a = 4, \quad DN = 2, \quad CL = 3, \quad LN = \frac{a\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}.$$

Объём пирамиды $CNLB_1$ равен $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} CL \cdot DN \right) \cdot BB_1 = 4$.

С другой стороны, объём этой пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} NB_1 \cdot LN \right) \cdot x = x\sqrt{5}$,

где x — расстояние от точки C до плоскости α . Из равенства $x\sqrt{5} = 4$ получаем $x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.



Задание 14.5

В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AB и $B_1 C_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = B_1 L = 2$. Точка M – середина ребра $A_1 C_1$. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Решение.

а) Проведём через точки K и L прямые, параллельные прямой AC . Пусть эти прямые пересекают рёбра BC и $A_1 B_1$ в точках K_1 и L_1 соответственно (рис. 1). Тогда трапеция $KL_1 LK_1$ является сечением исходной призмы плоскостью γ . Рассмотрим плоскость $BB_1 M$. Пусть эта плоскость пересекает прямые AC , KK_1 и LL_1 в точках N , E и F соответственно. Четырёхугольник $BB_1 MN$ –

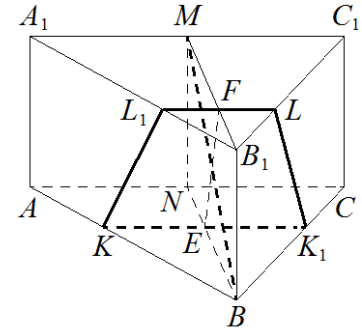


Рис. 1

прямоугольником, причём $BB_1 = 3$, $B_1 M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A_1 B_1 = 3\sqrt{3}$.

Кроме того, $NE : EB = AK : KB = 1 : 2$, $B_1 F : FM = B_1 L : LC_1 = 1 : 2$, откуда $MF = 2\sqrt{3}$, $NE = \sqrt{3}$. Пусть EH – высота трапеции $EFMN$ (рис. 2), тогда

$$FH = MF - NE = \sqrt{3}.$$

$$\text{Поскольку } \tan \angle MFE = \frac{EH}{FH} = \sqrt{3} = \frac{MB_1}{BB_1} = \tan \angle MBB_1,$$

$$\angle MFE = \angle MBB_1 = 90^\circ - \angle BMF,$$

то есть прямые EF и BM перпендикулярны.

Прямая KK_1 параллельна прямой AC , которая перпендикулярна плоскости $BB_1 M$. Значит, прямые KK_1 и EF перпендикулярны прямой BM , поэтому прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Расстояние от точки M до плоскости γ равно $MF \cdot \sin \angle MFE$, а площадь трапеции $KL_1 LK_1$ равна

$$\frac{KK_1 + LL_1}{2} \cdot EF = \frac{\frac{2}{3} AC + \frac{1}{3} A_1 C_1}{2} \cdot \frac{EH}{\sin \angle MFE} = \frac{9}{\sin \angle MFE}.$$

$$\text{Значит, искомый объём равен } \frac{1}{3} \cdot MF \cdot \sin \angle MFE \cdot \frac{9}{\sin \angle MFE} = 6\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $6\sqrt{3}$.

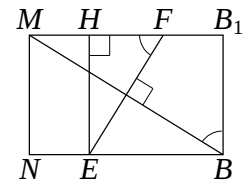


Рис. 2

Задание 14.6

Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K – точка пересечения прямых AB и CD .

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

Решение.

а) Заметим, что $\angle AKD = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, поэтому они пересекаются по прямой, содержащей высоту пирамиды. Значит, PK – высота пирамиды. Таким образом, угол $\angle AKD$ является линейным углом двугранного угла между плоскостями PAB и PCD . Значит, они перпендикулярны.

б) Поскольку $AB = CD$, трапеция $ABCD$ является равнобедренной. Значит,

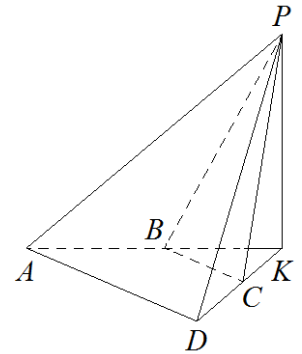
$$\angle BAD = \angle ADC = \angle KBC = \angle KCB = 45^\circ;$$

$$BK = CK = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, площадь треугольника KBC равна $S_{KBC} = \frac{BK \cdot CK}{2} = 4$,

а объём пирамиды $KBCP$ равен $\frac{PK \cdot S_{KBC}}{3} = 12$.

Ответ: б) 12.



Примеры оценивания выполнения задания 14

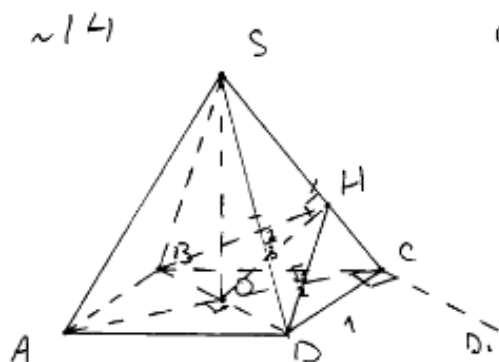
Пример 14.1.1

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB=1$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α .

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D .

б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC , считая от вершины S , если площадь сечения равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$?

Ответ: б) 8:1.



а) Док-ть, что $B \in \alpha, D \in \alpha$

1) Построим $OH \perp SC$

2) в пл-ть (ABC) :

построим $CD_1 \parallel BD$,

$BD \perp AC$ (по св диаг квадрата $ABCD$)
т.к. пирамида правильная)

$\Rightarrow D_1C \perp AC$ (по теореме о двух перпендикулярных плоскостях)

3) в $\triangle SOC$.

SO - пер-р к (ABC)
 SC - наклонная
 OC - проекция

$CD_1 \subset (ABC)$

$CD_1 \cap SC$

$CD_1 \perp AC$ (по док)

$\left. \begin{array}{l} CD_1 \perp SC \\ CD_1 \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} CD_1 \perp SC \\ CD_1 \parallel BD \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow SC \perp (BHD)$

$\Rightarrow BD \perp SC$

4) Построим пл-ть (BHD) :

$OH \subset (BHD), OH \perp SC$ (по построению) $\Rightarrow SC \perp (BHD)$

$BD \subset (BHD), SC \perp BD$ (по док)

5) Получили, что пл-ть (BHD) проходит через точки O, B, D и пер-на пр. SC , $SC \perp (BHD) \Rightarrow B \in \alpha, D \in \alpha$ - что и требовалось доказать.

6) в $\triangle BCD, \angle C = 90^\circ: BD^2 = BC^2 + DC^2 = 2, BD = \sqrt{2}$ (по теореме Пифагора)

2) $S_{BHD} = \frac{1}{2} OH \cdot BD = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (по условию)

$\frac{1}{2} OH \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}, OH = \frac{2}{3}$

$$3) \quad BD = AC = \sqrt{2} \text{ (по св. диаг. квадрата)},$$

$$AO = OC = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (по св. диаг. квадрата)}$$

$$4) \quad \Delta OHC, \angle OHC = 90^\circ \text{ (по постро.). по Пифагору}$$

$$OC^2 = OH^2 + HC^2$$

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{9} + HC^2$$

$$HC^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

$$HC = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$5) \quad \Delta SOH, \angle O = 90^\circ:$$

$$OH^2 = HC \cdot SH \text{ (по св. геометрии)}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{1}{18} \cdot SH \quad \left\{ \begin{array}{l} SH = \frac{4 \cdot 6}{9\sqrt{2}} = \frac{8}{3\sqrt{2}} \\ \frac{4}{9} = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot SH \end{array} \right.$$

$$6) \quad \frac{SH}{HC} = \frac{8 \cdot 6}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{16}{2} = \frac{8}{1}$$

Ответ: 8:1

Комментарий.

Верное доказательство утверждения пункта а и обоснованный верный ответ в пункте б.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 14.1.2

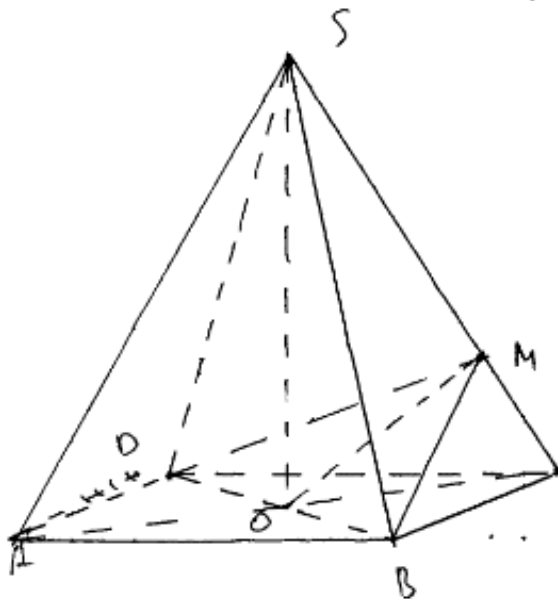
В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB=1$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α .

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D .

б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC , считая от вершины S , если площадь сечения равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$?

Ответ: б) 8:1.

р 14



а) $\alpha \perp SC \Rightarrow \alpha$ должна содержать две пересекающиеся прямые, перпендикулярные SC $\angle \alpha SC = M$
 $OM \perp SC$

по т. о 3-х $\perp$:

OC — ^{прямая} перпендикуляр SC на $(ABCD)$

$OC \perp DB \Rightarrow SC \perp DB$ ~~и т.д.~~

α содержит $SC \perp \alpha$;
 $OC \perp DB \Rightarrow DB \perp \alpha$ $O \in DB$
 и т.д. $DB \subset \alpha$
 и т.д.

б) пусть $SO = h$; $DB = \sqrt{2}$
 тогда $SC = \sqrt{h^2 + OC^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}}$
 по т. Пифагора $\triangle SOC$

$OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\triangle SOC$ — прямоугольный $\Rightarrow OM = \frac{SO \cdot OC}{SC} =$

$= \frac{h \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{2}}} = \frac{h}{\sqrt{2h^2 + 1}}$

$S_{\triangle OMB} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot DB = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\sqrt{2h^2 + 1}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$3h = 2\sqrt{2h^2 + 1}$

$9h^2 = 4(2h^2 + 1)$

$9h^2 = 8h^2 + 4$; $h^2 = 4 \Rightarrow h = 2$

$$SO = 2$$

$$OC = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$SC = \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$OM = \frac{SO \cdot OC}{SC} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{3}$$

по т. Пифагора для $\triangle OMC$: $MC = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{9}} = \frac{1}{3}$

по т. Пифагора для $\triangle OMS$: $SM = \sqrt{OS^2 - OM^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{32}{9}}$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$SM : MC = \frac{4\sqrt{2} \cdot 3}{3 \cdot 1} = 4\sqrt{2} : 1$$

Ответ: $\angle) 4\sqrt{2} : 1$

Комментарий.

Верное доказательство утверждения пункта а и получен неверный ответ в пункте б (не арифметическая ошибка при нахождении длины отрезка MC).

Оценка эксперта: 1 балл.

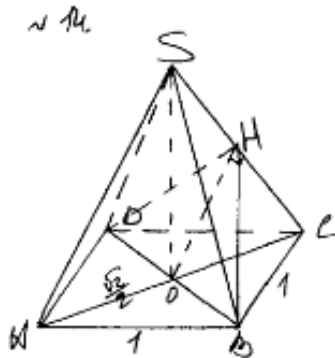
Пример 14.1.3

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB=1$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α .

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D .

б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC , считая от вершины S , если площадь сечения равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$?

Ответ: б) 8:1.



Дано: $SABCD$ - прав. пирамида, $AB=1$

$\alpha \cap BD = O$, $O \in \alpha$, $\alpha \perp SC$

а) Доказ-ть: $B \in \alpha$, $D \in \alpha$

б) Доказательство

Проведём $OH \perp SC$ $OH \subset (\alpha SC)$ ($O, H \in (\alpha SC)$)

$(\alpha SC) \cap (SBD) = SO$; $B, D \in (SBD)$, $O \in BD$

~~Следств. перпендикулярности~~ ~~и~~ ~~нахождения~~

$\alpha \cap (SBD) = BD$

т. B и D равноудалены от H , $\Rightarrow B, D, H$ - сечение плоск-ти α .

б) Найдем: $\frac{SH}{HC}$

$$S_{BDH} = \frac{\sqrt{2}}{2} = BD \cdot OH$$

$BH = DH$, т.к. $SABCD$ - правильная пирамида $\left(\begin{array}{l} \Delta BSH = \Delta DSH \text{ (по 1 пр)} \\ 1) \angle BSH = \angle DSH \\ 2) SH - общ \\ 3) BS = DS \end{array} \right)$

OH - медиана ΔBDH

OH - высота ΔBDH (т.к. он равноб-осен)

$$S_{BDH} = \frac{BD \cdot OH}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2} \cdot OH}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$OH = \frac{2}{2} = 1$$

$$BD = a\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Которая равна стороне основания

Т.к. $OH \perp SC$, по теореме Пифагора

$$SH = \sqrt{SC^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{\frac{2}{4} - 1} = \sqrt{\frac{2-4}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Delta S O S$ - прямоу., $OH \perp SC$. Обозначим HC за x , тогда.

$$OH^2 = SH \cdot CH \quad \frac{4}{9} = SH \cdot \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$OC^2 = CH \cdot SC \quad SH = \frac{4 \cdot 6}{9 \cdot \sqrt{2}} = \frac{8}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

(по формуле высоты в прямоугольном три-ке)

$$\frac{SH}{HC} = \frac{4\sqrt{2}}{3} : \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{8}{1}$$

Ответ: $8 : 1$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 14.1.4

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB=1$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α .

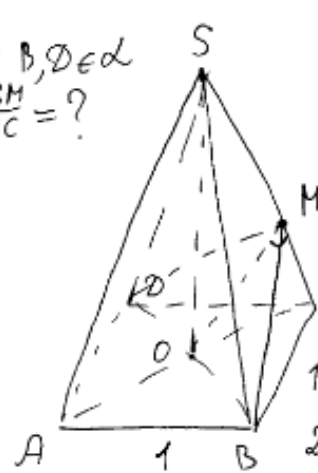
а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D .

б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC , считая от вершины S , если площадь сечения равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$?

Ответ: б) 8:1.

№ 14

а) (!) $B, D \in \alpha$
 б) $\frac{SM}{MC} = ?$



① Проведём из точки O прямую $\perp SC$
 ② $B, M \in (BCS)$
 ③ $D, M \in (DCS)$
 1) OC - проекция
 SC - перп
 $OC \perp BD$
 $\Rightarrow BD \perp SC$ (т. о 3 перпен.)
 2) $OB \perp SC$
 $OM \perp SC$
 $OM \cap BD$
 $\Rightarrow (BDM) \perp SC \parallel \Rightarrow$

$\Rightarrow (BDM)$ - искомое сечение $\alpha \parallel \Rightarrow B, D \in \alpha$, тогда α проходит через вершины B и D . что.

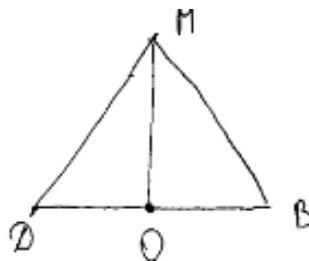
OC - проекция
 OM - перп
 $OC \perp BD$
 $\Rightarrow OM \perp BD$ (т. о 3 перп.)

O - сев $DB \parallel \Rightarrow OM = m$
 $OM \perp DB \parallel \Rightarrow OM = h \Rightarrow \triangle BDM - \text{плоский} \Rightarrow S_{BDM} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot DB$

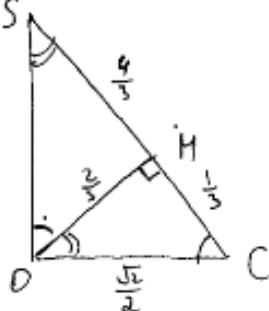
$$S_{BDM} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot DB$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot \sqrt{2}$$

$$OM = \frac{\sqrt{2}}{3} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$$



✗ $\triangle OSC$:



$$\triangle SOH \sim \triangle OCH \text{ (по 2 углам)} \parallel \Rightarrow \Rightarrow \frac{OH}{HC} = \frac{HS}{OH} \parallel \Rightarrow HS = \frac{OH^2}{HC} = \frac{4}{9} : \frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{SH}{HC} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9} = \frac{4}{3} //$$

Ответ: б) $\frac{SH}{HC} = \frac{4}{1}$

Комментарий.

Неверное доказательство утверждения пункта а и неверное решение пункта б.

Оценка эксперта: 0 баллов.

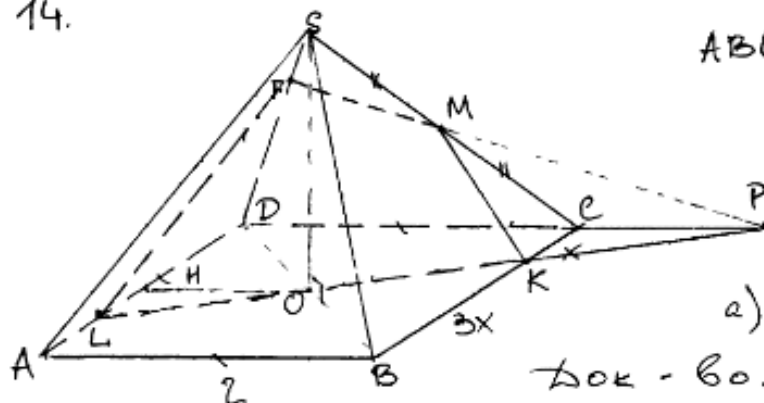
Пример 14.2.1

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра SC , точка K делит ребро BC в отношении $BK:KC = 3:1$, а $AB = 2$ и $SO = \sqrt{14}$.

- а) Докажите, что плоскость OMK параллельна прямой SA .
б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMK пересекает грань SAD .

Ответ: б) 3.

✓ 14.



ABCD - прав. пирамида

$$AB = 2, SO = \sqrt{14}$$

$$BK : KC = 3 : 1$$

$$MS = CS$$

а) Док. таб: SA II (OMK)

Док - 60.

FLKM - сечение пирамиды SABCD плоскостью
 $SA \in (ASD)$ и $FL \in (ASD)$, причем FL - ОМК.
 Таким пересечением (ОМК) и (ASD) следовательно,
 но, $SA \parallel (ОМК)$ если $SA \parallel FL$.

Рассм. пл-ть основания $ABCD$.

[См. мет 4]

Т.к. $SABCD$ - правильн. пирамида, $ABCD$ - квадрат $\Rightarrow \frac{AL}{DL} = \frac{KC}{BK} = \frac{1}{3}$ $AD = AB = 2 \Rightarrow KC = \frac{2}{4}$

$\triangle PDL \sim \triangle PCK$ по 2 углам ($\angle DPK$ - общий;
 $\frac{CK}{DL} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CP}{DP} = \frac{1}{3}$ тогда $AD \parallel BC \Rightarrow \angle DLP =$
 $CP = \frac{1}{3}(2 + CP), CP = 1.$ соответств. углы) $= \angle CKP$

Год. Менее для п-ти (CSD):

$$\frac{DF}{FS} \cdot \frac{SM}{CM} \cdot \frac{PC}{PD} = 1 \quad \frac{PC}{PD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DF}{FS} = 3 \quad (SM \cdot CM)$$

Рассм. греть SAD.



$$\frac{SF}{FD} = \frac{AL}{LD} \Rightarrow$$

⇒ по т. Фалеса

SA 11 FL

что и требовалось доказать.

8) Haiti FL.

Доп. постр. $OH \perp AD$ т.к. $ABCD$ - квадрат, O - центр
 $OH = 1$, $SO \perp ABCD \Rightarrow SO \perp OH$,

но. т. Стефанова для ΔOSH : $OH^2 + SO^2 = SH^2$

тогда $SH = \sqrt{14 + 1} = \sqrt{15}$.

$$AH = HD = \frac{AD}{2} = 1, \text{ тогда } SA = \sqrt{1+15} = 4$$

$\Delta ASD \sim \Delta LFD$ по 2 углам, (по т. Инфатора для ΔASH)

Т.к. LD - обш., $LSAL = LFLD$ - совб при $SAL \parallel FL$
и секущей AD .
 $FL = FD = 34 = 3$

$$\frac{FL}{SA} = \frac{FD}{SD} = \frac{3x}{x+4x} = \frac{3}{5}$$

$$FL = \frac{3}{4} SA = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$$

Отвеч: 3.

Комментарий.

Верное доказательство утверждения пункта *a* и обоснованный верный ответ в пункте *б*.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 14.2.2

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра SC , точка K делит ребро BC в отношении $BK:KC=3:1$, а $AB=2$ и $SO=\sqrt{14}$.

а) Докажите, что плоскость OMK параллельна прямой SA .

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMK пересекает грань SAD .

Ответ: б) 3.

а) Из $ABCD$. O — центр квадрата $\Rightarrow$
 $AO=OC$, Проведу OM .
 Из $\triangle ASC$. $AO=OC$ $\left\{ \begin{array}{l} OM - \text{серед.} \\ SM=MC \end{array} \right\}$ линия

Построю сечение (I) $OM \parallel AS$
 плоскостью OMK .
 соединю точки K и M , т.к. $K \in (BSC)$ и $M \in (BSC)$. Соединю точки K и O и продлю. Прямую OK до пересечения с AD в точке L и до пересечения с прямой SD в точке F .
 $F \in RC \Rightarrow F \in (SDC) \Rightarrow$ соединим F и M и продлим, до пересечения с SD в точке G . $G \in SD \Rightarrow G \in (ASD) \Rightarrow$ можно соединить G и L , т.е. $LG \subset AD \Rightarrow LG \in (ASD)$.
 Итак, $LG \parallel K$ — сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью OMK .

$OM \parallel AS$ (по след. (I)) $\left\{ \begin{array}{l} OM \in (OMK) \end{array} \right\} \Rightarrow AS \parallel (OMK)$ (по признаку паралл. прямой и плоскости)
 ч.т.в.

б) т.к. $ABCD$ — квадрат, то $AB=BC=2$, и т.к. $BK:KC=3:1$, то
 $BK = \frac{3}{2}$, а $KC = \frac{1}{2}$.
 Из $(ABCD)$.

Рассмотрим $\triangle LOD$ и $\triangle OKC$:
 $\angle LDO = \angle OKC$ (как накрест. лем. при перес. прямых LD и OK и сек. DB)
 $\angle LOD = \angle OKC$ (как верт.)
 $DO = OK$ (т.к. O — центр квадрата $ABCD$)

$\triangle LOD = \triangle BOK$
по стороне и 2 углам.
по двум углам.
 $\downarrow$
 $LD = BK = \frac{3}{2}$

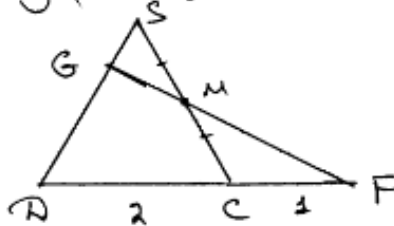
Рассмотрим $\triangle LDF$ и $\triangle KCF$:

$\angle F$ - общий
 $\angle DLK = \angle CKF$ (т.к. $LD \parallel KC$) } $\triangle LDF \sim \triangle KCF$
по 2 углам

$$\frac{CF}{DF} = \frac{KC}{LD}, \quad DF = DC + CF$$

$$\frac{CF}{2+CF} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \quad \text{или } CF = 2 + CF$$

из (DSC):



По т. Менелая для $\triangle SDC$ и сеч. GF .

$$\frac{CG}{GS} \cdot \frac{SM}{MC} \cdot \frac{CF}{DF} = 1$$

$$\frac{DG}{GS} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{DG}{GS} = 3 \Rightarrow DG = 3GS$$

из $\triangle ADS$: По т. Пифагора: $AS^2 = AD^2 + SD^2$, где $AD = \frac{AC}{2}$,

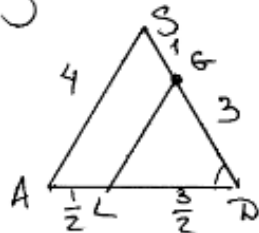
$$AS^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (\sqrt{4})^2$$

$$AS^2 = 2 + 4$$

$$AS^2 = 6$$

$$AS = 4$$

из $\triangle ASD$:



$$AD = 2; \quad LD = \frac{3}{2} \Rightarrow AL = \frac{1}{2}$$

$SD = 4$, т.к. пирамида правильная

$$\left. \begin{array}{l} DG + SG = 4 \\ DG = 3SG \end{array} \right\} \quad \text{или } SG = 1; \quad SG = 1 \Rightarrow DG = 3$$

Рассмотрим $\triangle ASD$ и $\triangle LGD$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle D - \text{общий} \\ \frac{DG}{DS} = \frac{3}{4} \\ \frac{LD}{AD} = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ASD \sim \triangle LGD$$

по углу
и 2 соответственным
сторонам

$$\frac{DG}{DS} = \frac{LG}{AS}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{LG}{4} \Rightarrow LG = 3$$

LG - отрезок, по которому плоскость OMK пересекет
границь SAD .

Ответ: 3.

Комментарий.

Верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованный верный ответ в пункте *б*.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 14.2.3

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра SC , точка K делит ребро BC в отношении $BK:KC=3:1$, а $AB=2$ и $SO=\sqrt{14}$.

- Докажите, что плоскость OMK параллельна прямой SA .
- Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMK пересекает грань SAD .

Ответ: б) 3.



т.г. $(OMK) \parallel (SA)$
 т.к O — середина AC из того, что $SABCD$ — прав., то
 OM — ср. линия $\triangle SAC \Rightarrow OM \parallel SA$
 Тогда в (OMK) лежит прямая $(OM) \parallel (SA)$,
 притом (OMK) не совпадает с п-тью $(SAOM)$,
 поэтому $(OMK) \parallel (SA)$ т.г.

Комментарий.

Верное доказательство утверждения пункта a . Решение пункта b отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

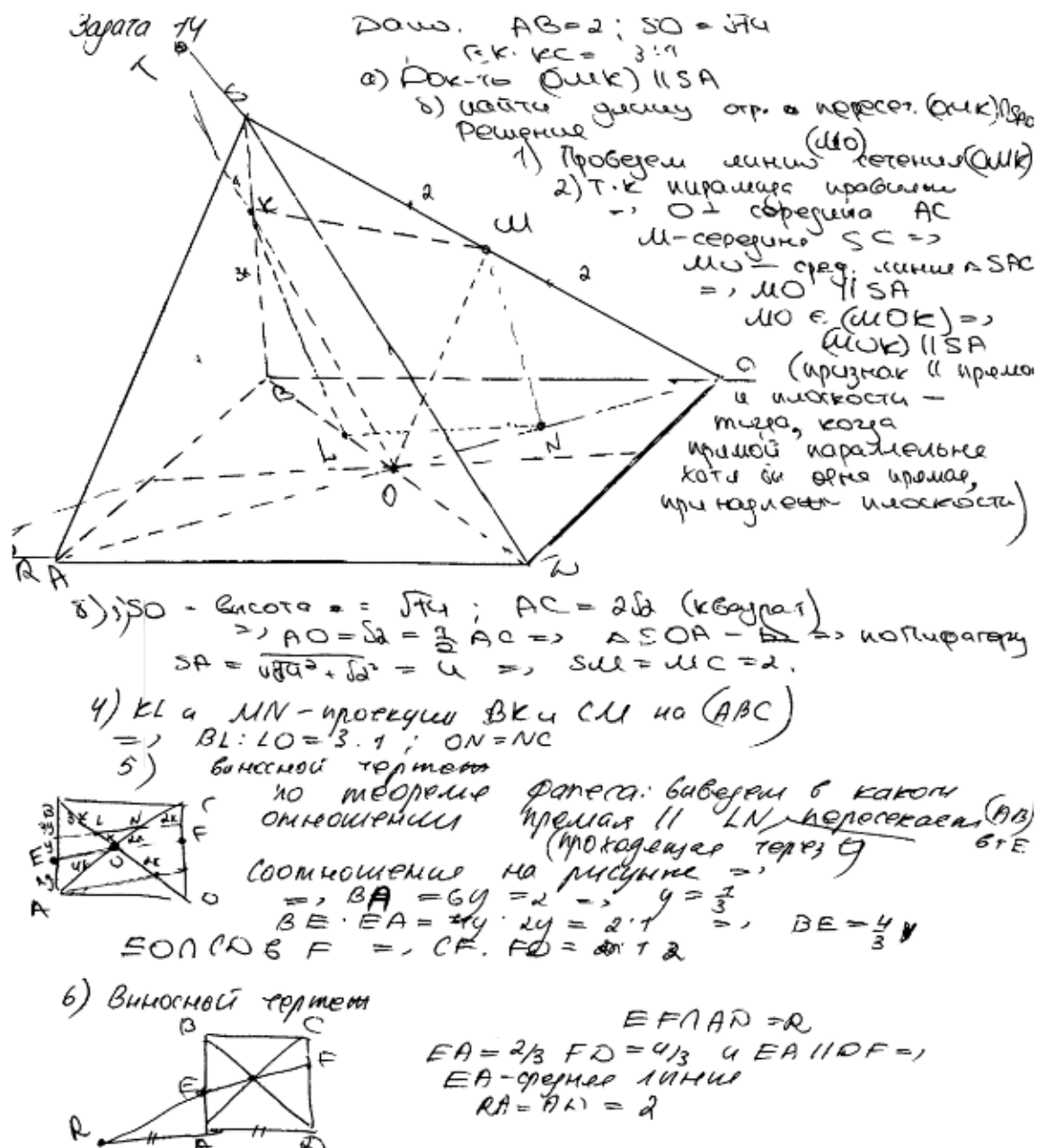
Пример 14.2.4

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра SC , точка K делит ребро BC в отношении $BK:KC=3:1$, а $AB=2$ и $SO=\sqrt{14}$.

а) Докажите, что плоскость OMK параллельна прямой SA .

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMK пересекает грань SAD .

Ответ: б) 3.



Комментарий.

Решалась другая задача: точка K лежит на стороне основания, а не на боковом ребре.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 14.3.1

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 2$, а точка K — середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

Ответ: б) $\frac{7\sqrt{10}}{6}$.

а) Проведем линию $l \perp (B_1 C_1 C)$
 $KK_1 \perp (B_1 C_1 C)$ $D_2 \perp BC$
 $D_2 \perp B_1 C_1$

$\Rightarrow M, K$ — проекции MK на $(B_1 C_1 C)$
 плоскость пер-я // грани по // прямым $(B_1 C_1 C) \parallel (AA_1 D_1)$
 $\Rightarrow MK \parallel CF$ (F — точка пер-я (MKC) с BB_1)

$ABCD$ — равнобедренная трапеция
 $\Rightarrow D_2 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

$B_1 M_1 = A_1 M_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Пусть $AD_1 = 2x \Rightarrow D_1 K = DK = x$

Проведем $A_1 L_1 \parallel MK$
 $A_1 L_1 \cap D_2 D_3 = G$

$\Delta MKD_3 \sim \Delta B_1 D_3 G$ (по 2L)
 $\frac{D_3 K_1}{D_3 G} = \frac{M_1 D_3}{B_1 D_3} = \frac{2}{5}$
 $D_3 G = \frac{5 \cdot x}{4} \Rightarrow GK_1 = \frac{x}{4}$
 $GD_2 = \frac{3x}{4}$

$\Delta BFC \sim \Delta B B_1 L_1$ (по 2L) $\Rightarrow \frac{BF}{B B_1} = \frac{BC}{B L_1} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow F$ — с-р BB_1
 т.е. $(MKC) \cap BB_1 = F$
 F — с-р BB_1

б) Продлим CF до пер-я с $A_1 G = H$.
 $\Delta H B_1 F \sim \Delta C B F$ (по 2L)
 $\Rightarrow \frac{H B_1}{B C} = \frac{B F}{F B} \Rightarrow H B_1 = BC = 2$
 $H M \cap A_1 B_1 = L$
 $\Delta A_1 L M \sim \Delta B_1 L H$ (по 2L)
 $\Rightarrow \frac{A_1 L}{B_1 L} = \frac{A_1 M}{B_1 H} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A_1 L}{B_1 L} = \frac{2}{3}$

$\angle ADC = 60^\circ$
 Проведем $BH_1 \perp AN$
 $\angle ABH_1 = 30^\circ \Rightarrow AH_1 = \frac{1}{2} AB$
 $\Rightarrow AB = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

- прямой $\angle D = 90^\circ$

0. 2 2 2

$$w_2 C = 4 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \underline{1} = 3$$

$$WC^2 = (2x)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4x^2 + 3$$

$$\angle MDC = 90^\circ \Rightarrow MC^2 = KC^2 + MK^2$$

$$4x^2 + 3 = x^2 + 4 + x^2 + 1$$

$$2x^2 = 2$$

$$y^2 = 1$$

$x = 1.$

$$RR_1 = 2x = 2$$

MLFSK - искомое сечение

$$S_{\Delta MKC} = \frac{1}{2} MK \cdot KC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+4} \cdot \sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

ПОТ. КОС В Д Д, Л, М

$$L_M^2 = \frac{1}{5} + 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{5} - \frac{2}{5} = \frac{8}{5} \quad L_M = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$L_{BF} = \sqrt{\frac{4}{9} + 1} = \sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

в FBC-прямоуг. ($\angle B = 90^\circ$) $FC = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

Проблемы $L_2 C^2 \perp AB$ $L_2 C^2$ по т. кос. в ΔABC .

$$L_2 C^2 = \frac{4}{9} + 4 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{9} + 4 + \frac{4}{3} = \frac{52}{9}$$

а $L_2 C$ -цепи ($L_2 = 90^\circ$)

$$LC = \sqrt{4 + \frac{52}{9}} = \sqrt{\frac{88}{9}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{22}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{22}}{3}$$

$$\cos \angle LCF = \frac{\frac{88}{9} \cdot \frac{5-13}{9}}{2\sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{22}}{3}}$$

$$S_4: CLF = \frac{1}{2! \cdot 3} \frac{\cancel{2} \sqrt{2} \cdot \cancel{5} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

ΔLMC
 $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 41
 $\sqrt{4}$
 $\frac{\sqrt{8}}{3}$
 C

$$\cos \angle \text{at } C = \frac{\frac{7}{9} + \frac{7}{9} - \frac{88}{9}}{\frac{2 \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}{3}} = \frac{-\frac{8}{9}}{\frac{14}{3}} = -\frac{3}{7}$$

$$9M \angle LMC = \sqrt{\frac{40}{49}} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$\sin LMC = \frac{1}{2} \cdot LMC \sin LMC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$S_{LWKEF} = S_{LWKE} + 84 L_{WKE} + S_{LWFC} = \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{2}{6} \sqrt{10}$$

Amber: $\delta \mid \frac{7}{5} \sqrt{10}$

Комментарий.

Верное доказательство утверждения пункта *a* и обоснованный верный ответ в пункте *б*.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 14.3.2

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3$ и $BC=2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1:2$, а точка K — середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

Ответ: б) $\frac{7\sqrt{10}}{6}$.

13. а) Построим сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью (MKE) :

$(MKE) \cap (ADD_1) = MK$, $(ADD_1) \parallel (BCC_1)$
 $\Rightarrow (MKE) \cap (BCC_1)$ по прямой,

которая параллельна $MK \Rightarrow$ построим $CE \parallel MK \Rightarrow E \in (MKE)$

Пусть $MK \cap AA_1 = O \Rightarrow (MKE) \cap (ADD_1) = OK \Rightarrow O \in (MKE)$, тогда пусть $OE \cap A_1 B_1 = F$.

$\Rightarrow ESKMF$ — искомое сечение

Так как $MK \parallel EC$ и $ME \parallel AD$ (или основания трапеции), то $\angle ECK = \angle KMD_1$

$\triangle MKD_1$ с $\triangle KCE$ (по двум углам $\angle ECK = \angle KMD_1 = 90^\circ$ (т.к. призма прямая), $\angle ECK = \angle KMD_1$)

$\Rightarrow \frac{MD_1}{BC} = \frac{D_1 K}{KE}$

$\frac{AD}{3} = \frac{D_1 K}{KE} \Rightarrow 1 = \frac{D_1 K}{KE}$

$1 = \frac{DD_1}{2KE} = \frac{BB_1}{2KE} = \frac{BE + EB_1}{2KE}$

$2KE = BE + EB_1$

$KE = EB_1$

$\Rightarrow$ т.к. $(MKE) \cap B_1 B_1 = E$, (MKE) делит BB_1 пополам, что и требовалось доказать

Комментарий.

Верное доказательство утверждения пункта а. Решение пункта б отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

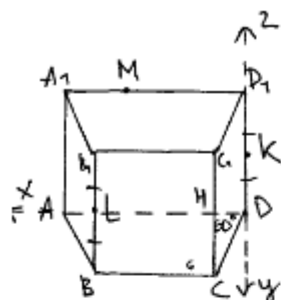
Пример 14.3.3

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3$ и $BC=2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 2$, а точка K — середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

Ответ: б) $\frac{7\sqrt{10}}{6}$.



$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — призм
 $\angle ADC = 60^\circ$
 $ABCD$ — равноб. трап.
 $\angle MKC = 90^\circ$
 $AD=3$ $BC=2$

$$\frac{A_1 M}{MD_1} = \frac{1}{2}$$

K — ср. DD_1

Доказ-ть:

$L \in MKC$

Система координат:

$D(0; 0; 0)$ пусть $DD_1 = h$

1) $AD \perp DC$

$\triangle CHD$, $\angle H = 90^\circ$

2) $\triangle MKC$

$M(2; 0; h)$

$K(0; 0; \frac{h}{2})$

$C(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$

$\angle D = 30^\circ$, $\angle C = 30^\circ \Rightarrow$

$$HD = \frac{1}{2} CD \quad HD = \frac{1}{2} \left(\frac{TK}{\sin \frac{h}{d}} \right)$$

$$CD = 1$$

$$HC = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Составим уравн. MKC :

$$\begin{cases} 2a + hc + d = 0 & c = -\frac{2d}{h} \\ \frac{h}{2}c + d = 0 & a = \frac{d}{2} \\ \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0 & b = -\frac{5\sqrt{3}d}{6} \end{cases}$$

$$\frac{d}{2}x - \frac{5\sqrt{3}d}{6}y - \frac{2d}{h}z + d = 0 \quad | :d$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{5\sqrt{3}}{6}y - \frac{2}{h}z + 1 = 0$$

$L(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{h}{2})$ — координаты середины BB_1

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6 \cdot 2} - \frac{2}{h} \cdot \frac{h}{2} + 1 = 0$$

$$\frac{5}{4} - \frac{5}{4} - 1 + 1 = 0$$

$0 = 0 \Rightarrow L \in MKC \Rightarrow MKC \cap BB_1$
 в середине т.е.

Комментарий.

Верное доказательство утверждения пункта а. Решение пункта б отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

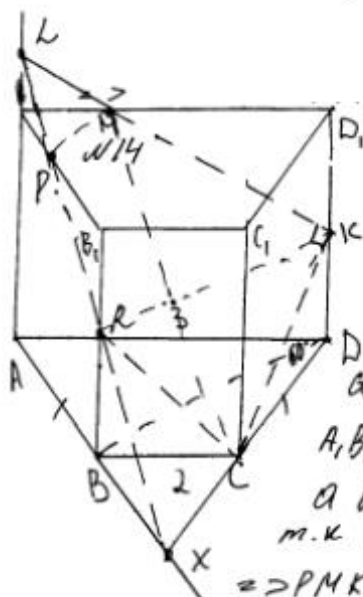
Пример 14.3.4

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3$ и $BC=2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1:2$, а точка K — середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

Ответ: б) $\frac{7\sqrt{10}}{6}$.

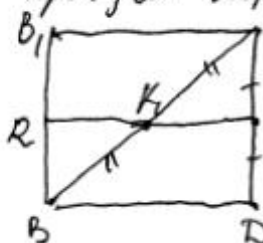


а) вед. МК и вед. КС, продлим
 СК (вед. т.с) до перес. с АВ в т.Х
 продлим АА, до перес. с МК в т.Л
 вед т.Л и т.Х т.к они в АА, ВВ, $\Rightarrow$
 вед ЛХ пересек
 А, В, в т. Р,
 а ВВ, в точке Р $\Rightarrow$ вед. РС, РР и РМ
 т.к эти три точки лежат в одной плоскости $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ РМКСР - искомое сечение

~~РМКСР~~ : МКС режет ВВ, пополам

вед. КР и ВД, т.к прямая прямая, то $KB \parallel KD$
 и т.к боковые грани $\perp$ основанию $\Rightarrow KD \perp BD$ и $KB \parallel KD$
 $\Rightarrow BDK -$ прямоугольник $\Rightarrow RK \parallel BD$

проверим ВД,



пусть $RK \cap BD = K_1$, т.к K, K_1 - часть КР
 то $K, K_1 \parallel BD$ и K - делит B, D - пополам (из уса.)
 $\Rightarrow$ по т. Фалеса K_1 - середина BD ,
 $\Rightarrow$ ~~ВД~~ $\parallel$ пропорции $CK, \Rightarrow$ т. Р
 значит т.к BD - диагональ прямоугольника BDD_1B_1 (т.к прямая прямая)
 то K_1 - т. перес. диагоналей $\Rightarrow$ по т. Фалеса
 RK_1 (часть RK) $\parallel BD$ и K_1 - сер. диаг $\Rightarrow$ сечение делит BB_1 пополам

Комментарий.

Доказательство утверждения в пункте а не обосновано, пункт б не выполнен.

Оценка эксперта: 0 баллов.

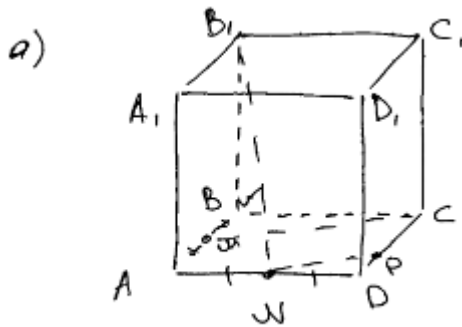
Пример 14.4.1

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1 N = 6$.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.



Δ -то:

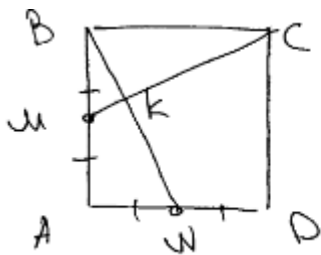
$CM \perp B_1 N$

Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб

N — с.р. AD

M — с.р. AB .



$K = CM \cap B_1 N$

Д, $B_1 N = 6$.

$AN = x$

$$B_1 N = \sqrt{4x^2 + 4x^2 + x^2} = 3x = 6$$

$$AN = x = 2$$

$$\Delta BMC = \Delta BAN \quad (BC = AB, \angle B = \angle A = 90^\circ, AN = MB)$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \angle BCM &= \angle MBN \\ \angle BMC &= \angle BNA, \\ \angle BCM + \angle BMC &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BKM = 180^\circ - \angle MBN - \angle CMB$$

$$BN - \text{проект. } B_1 N \text{ на } (ABC) \text{ — это } AN$$

$$\Rightarrow \angle(B_1 N, CM) = 90^\circ \text{ (по т.п. 2 т.п. 3 т.п.)}$$

$$NP \parallel CM, P = NP \cap CD$$

$$P \in \alpha, \text{ т.к. } NP \parallel CM.$$

Введём $OXYZ$, так что начало координат
 в A , Ox сов. с AO , Oy сов. с AA_1 , Oz сов. с AB .
 $\alpha: (B, NP): ax + by + cz + d = 0$.

$$\begin{array}{l} B(0; 4; 4) \\ N(2; 0; 0) \\ P(4; 0; 1) \\ C(4; 0; 4) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4b + 4c + d = 0 \\ 2a + d = 0 \\ 4a + c + d = 0 \\ d = 1, a = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 + c + d = 0 \\ 4b + 4c + 1 = 0 \end{array} \right., \quad \begin{array}{l} c = 1 \\ b = -\frac{5}{4} \end{array}$$

$$\alpha: -\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}y + z + 1 = 0$$

$$-2x - 5y + 4z + 4 = 0.$$

$$\begin{aligned} \rho(C; \alpha) &= \frac{|-2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4|}{\sqrt{4 + 25 + 16}} = \frac{12}{\sqrt{45}} = \\ &= \frac{12}{3\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}. \quad \text{Ответ: } \frac{4\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Комментарий.

Верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б.

Оценка эксперта: 3 балла.

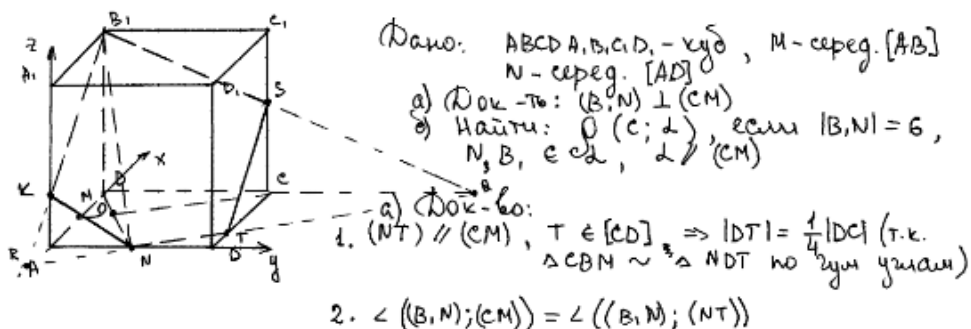
Пример 14.4.2

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1N = 6$.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.



3. введём систему координат (AB) — ось x , (AD) — ось y , (AA_1) — ось z . Пусть $|AB| = 4$, тогда $B_1(4; 0; 4)$, $N(0; 2; 0)$, $C(4; 4; 0)$.

4. $\vec{B_1N} \{ -4; 2; -4 \}$, $\vec{NT} \{ 1; 2; 0 \}$, $\vec{B_1N} \cdot \vec{NT} = -4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{B_1N} \perp \vec{NT} \Rightarrow (B_1N) \perp (NT) \Rightarrow (B_1N) \perp (CM)$ з.т.г.

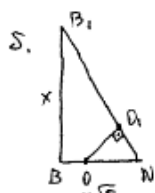
б) Решение:

1. $(NT) \perp (CM)$, $N \in (NT) \Rightarrow T \in \alpha$
 $(NT) \cap (BC) = Q$, $(QB_1) \cap (CC_1) = S$, $S \in \alpha$
 $(NT) \cap (AB) = R$, $(RB_1) \cap (AA_1) = K$, $K \in \alpha$

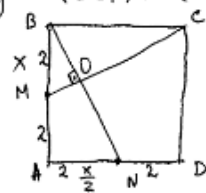
2. $(BN) = \text{пр}_{(ABC)}(B_1N)$, $(B_1N) \perp (NT) \Rightarrow (BN) \perp (NT) \Rightarrow (BN) \perp \alpha$

3. т.к. $\alpha \parallel (CM) \Rightarrow \rho$ от любой точки на (CM) до α одинаково

4. $(BN) \cap (CM) = O$, $(B_1NB) \perp \alpha \Rightarrow \rho(C; \alpha) = \rho(O; \alpha) = |OO_1|$, где $(OO_1) \perp (B_1N)$



$$|BN| = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$



$$|BN| = \sqrt{|BA|^2 + |AN|^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

$$|B_1N| = \sqrt{|BB_1|^2 + |BN|^2}$$

$$6 = \sqrt{x^2 + \frac{5x^2}{4}} \quad 6 = \frac{3x}{2} \quad x = 4$$

$\Delta ABN \sim \Delta OBN$ ($\angle B$ — общий)

$$\frac{|BN|}{|BM|} = \frac{|BO|}{|BA|} \Rightarrow \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{|BO|}{4} \Rightarrow |BO| = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$|ON| = 2\sqrt{5} - \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$\Delta BB_1N \sim \Delta O_1ON \quad (\angle N \text{ — общий}) \quad \frac{|ON|}{|B_1N|} = \frac{|OO_1|}{|BB_1|} \Rightarrow \frac{\frac{6}{\sqrt{5}}}{6} = \frac{|OO_1|}{4} \Rightarrow |OO_1| = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{5}}$

Комментарий.

Верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б.

Оценка эксперта: 3 балла.

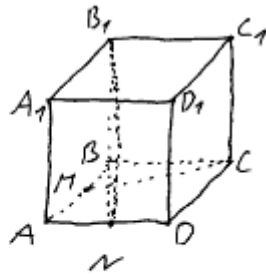
Пример 14.4.3

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1 N = 6$.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.



3) Пусть L — точка пересечения $B_1 N$ и CM . Рассмотрим $\triangle BLM$.

Заметим, что

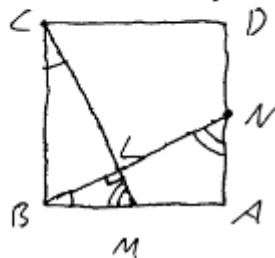
$$\angle LBM + \angle LMB = \angle CBM + \angle CMB = 90^\circ$$

Значит, $\triangle BLM$ — прямоугольный с прямым углом $\angle BLM$. Значит, $CM \perp BN$.

4) По теореме о трёх перпендикулярах $B_1 N \perp CM$ т.к. $CM \perp BN$.

Решение.

(а) 1) Рассмотрим плоскость основания куба (ABC) .



BN — проекция $B_1 N$ на эту плоск. т.к. B_1 проецируется в точку B .

2) Рассмотрим $\triangle CMB$ и $\triangle BNA$.

$CB = BA$ как стороны квадрата.

$$NA = BM = \frac{1}{2} AB$$

$$\angle BAN = \angle CBM = 90^\circ$$

Значит, $\triangle CMB = \triangle BNA$ по катетам.

Следовательно, $\angle NBA = \angle BCM$ и

$$\angle BNA = \angle CMB$$

д) 1) Если $l \parallel CM$, то она пересекает (ABC) по прямой, параллельной CM . Т.к. l содержит N , то и $N \in (ABC)$, но прямая NN' — линия пересечения l и (ABC)

2) Рассмотрим

$\triangle BNA$.

По т. Пифагора:

$$BN^2 = NA^2 + BA^2$$

Пусть $NA = x$, тогда $AB = 2x$

$$BN = \sqrt{x^2 + 4x^2} = \sqrt{5}x$$

3) В $\triangle BB_7N$: По т. Пифагора:

$$B_7N^2 = BN^2 + BB_7^2$$

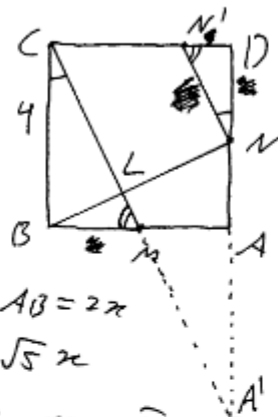
$$36 = 5x^2 + 4x^2 = 9x^2$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{исходно} \\ -2 \text{ не подходит, т.к. расстояние всегда} \\ \text{дольше нуля} \end{array} \right)$$

Значит, что длина стороны куба равна 4

4) Т.к. $BN \perp CM$ и $NN' \parallel CM$, то $BN \perp NN'$
Следовательно, расстояние от CM до l является LN

Рассмотрим от м. C до l будет являться расстояние от исходной точки на прямой CM до м. l , т.к. $l \parallel CM$
Значит, LN — исконое расстояние.



5) По т. Менелая для $\triangle BNA$ и секущей LN :

$$\frac{BL}{LN} = \frac{NA'}{A'A} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$$

6) Рассмотрим $\triangle CDA'$.

$MA = CD \cdot \frac{1}{2}$ и $MA \parallel CD$ (как стороны квадр.
мб)
Значит, MA — ср. линия, $\Rightarrow DA = AA' = 4$

7) Из пункта решения 5) получим:

$$\frac{BL}{LN} \cdot \frac{NA+AA'}{AA'} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$$

$$\frac{BL}{LN} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{BL}{LN} = \frac{2}{3} \quad \text{т.к. } BN = 2\sqrt{5} \quad (\sqrt{5}x \text{ где } x=2)$$

$$LN = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} BN = \frac{2}{3} BN - \frac{2}{3} LN$$

$$\frac{5}{2} LN = \frac{2}{3} BN$$

$$LN = \frac{2}{5} BN$$

$$LN = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Ответ. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

Комментарий.

Имеется верное доказательство утверждения пункта а, в пункте б получен неверный ответ не из-за арифметической ошибки.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 14.4.4

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1 N = 6$.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб; M — ср. AB ; N — ср. AD

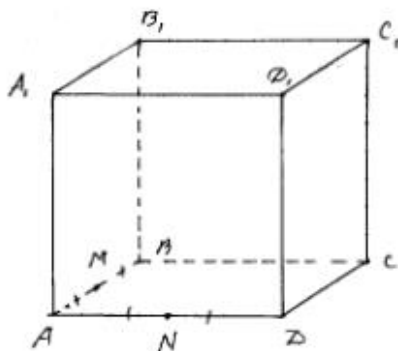
а) Доказать: $B_1 N \perp CM$

б) $\{N, B_1\} \in \alpha$; $\alpha \parallel CM$

$B_1 N = 6$

$\rho(C, \alpha) = ?$

а)



$$\begin{aligned}\vec{B_1 N} &= \vec{B_1 A_1} + \vec{A_1 A} + \vec{A N} = \vec{BA} + \vec{A_1 A} + \frac{\vec{AD}}{2} \\ \vec{CM} &= \vec{CB} + \vec{BM} = -\vec{AD} + \frac{\vec{BA}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B_1 N} \cdot \vec{CM} &= \left(\vec{BA} + \vec{A_1 A} + \frac{\vec{AD}}{2}\right) \cdot \left(-\vec{AD} + \frac{\vec{BA}}{2}\right) = \\ &= -\vec{BA} \cdot \vec{AD} - \vec{A_1 A} \cdot \vec{AD} - \frac{\vec{AD}^2}{2} + \frac{\vec{BA}^2}{2} + \frac{\vec{A_1 A} \cdot \vec{BA}}{2}, \quad \frac{\vec{BA} \cdot \vec{AD}}{4}\end{aligned}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{AD} = 0, \text{ т.к. } BA \perp AD$$

$$\vec{A_1 A} \cdot \vec{AD} = 0, \text{ т.к. } A_1 A \perp AD$$

$$\frac{-\vec{AD}^2 + \vec{BA}^2}{2} = 0, \text{ т.к. } AD = BA$$

$$\frac{\vec{A_1 A} \cdot \vec{BA}}{2} = 0, \text{ т.к. } A_1 A \perp BA$$

$$\frac{\vec{BA} \cdot \vec{AD}}{4} = 0, \text{ т.к. } BA \perp AD$$

$$\vec{B_1 N} \cdot \vec{CM} = 0$$



$$B_1 N \perp CM$$

$$\left(\begin{array}{l} \vec{B_1 N} \neq \vec{0} \\ \vec{CM} \neq \vec{0} \end{array}\right)$$

8) 1) Пусть a — сторона куба, $a > 0$

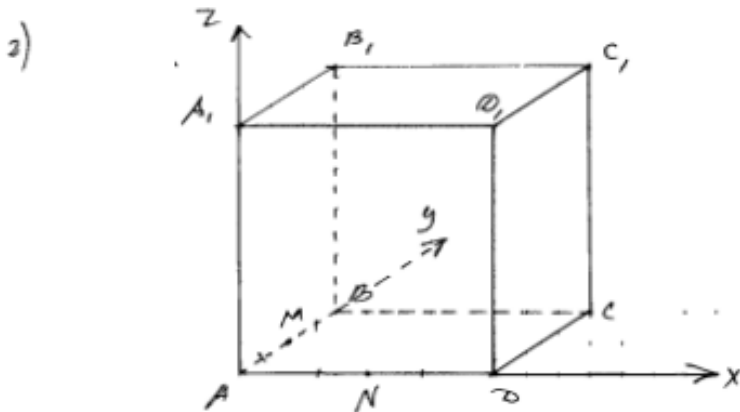
По т. Пифагора в $\triangle B_1BN$, $B_1N^2 = B_1B^2 + BN^2$

По т. Пифагора в $\triangle BAN$, $BN^2 = BA^2 + AN^2$

$$B_1N^2 = B_1B^2 + BA^2 + AN^2$$

$$36 = a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$36 = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow a = 4$$



Введём ортогональную систему координат

$$C(4; 4; 0) \quad B_1(0; 4; 4) \quad N(2; 0; 0) \quad M(0; 2; 0)$$

$$\overrightarrow{MC}(x_c - x_m; y_c - y_m; z_c - z_m) \quad \overrightarrow{MC}(4; 2; 0)$$

т.е. $L \perp MC$, то т. $P(x_N + x_{MC}; y_N + y_{MC}; z_N + z_{MC}) \in L$

$$P(6; 2; 0)$$

3) Найдём ур-ие L :

$$\begin{cases} ax_B + by_B + cz_B + d = 0 \\ ax_N + by_N + cz_N + d = 0 \\ ax_P + by_P + cz_P + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b + 4c + d = 0 \\ 2a + d = 0 \\ 6a + 2b + d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -\frac{d}{2} \\ -3d + 2b + d = 0 \\ 4b + 4c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{d}{2} \\ b = d \\ c = -\frac{5}{4}d \end{cases}$$

$$-\frac{x}{2} + y - \frac{5}{4}z + 1 = 0$$

$$2x - 4y + 5z - 4 = 0 \quad \text{— уравнение } \alpha.$$

$\vec{n}(2; -4; 5)$ — вектор нормален к α .

4) Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из m на α .

$$\text{Тогда, } \vec{CM} = (x_M - x_C; y_M - y_C; z_M - z_C)$$

$$\vec{CM} = (x_M - 4; y_M - 4; z_M)$$

$$\text{П.к. } CM \perp \alpha, \quad \vec{CM} = k\vec{n}; \quad k \in \mathbb{R}$$

$$x_M - 4 = 2k \rightarrow x_M = 4 + 2k$$

$$y_M - 4 = -4k \rightarrow y_M = 4 - 4k$$

$$z_M = 5k$$

$$\text{П.к. } M \in \alpha, \quad 2x_M - 4y_M + 5z_M - 4 = 0$$

$$2(4 + 2k) - 4(4 - 4k) + 5 \cdot 5k - 4 = 0$$

$$8 + 4k - 16 + 16k + 25k - 4 = 0$$

$$45k = 12$$

$$k = \frac{4}{15}$$

$$5) \rho(C; \alpha) = |\vec{CM}| = k |\vec{n}| = \frac{4}{15} \cdot \sqrt{4 + 16 + 25}$$

$$\rho(C; \alpha) = \frac{4}{15} \sqrt{45} = \frac{12\sqrt{5}}{15} = \frac{4}{5} \sqrt{5}$$

Ответ: ~~$\frac{12\sqrt{5}}{15}$~~ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

Комментарий.

Имеется верное доказательство утверждения пункта а, при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.

В предпоследней строке неверно вынесен множитель из-под корня.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 14.5.1

Решение.

Дано: $ABCA, B, C_1$ - прав. трехгр. приз. $AA_1 = 3, AB = 6, AK = 2, B, L = 2, A, M = MC_1 = 3.$

φ - плоскость $\parallel AC$ и проходящая через $K, L.$

а) Доказать $BM \perp \varphi$

б) $V = AKK_1LL_1$

$BF = \sqrt{BC^2 - FC^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
 $\triangle FHL \sim \triangle ACB$
 $BM = \sqrt{BF^2 + FL^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6$
 $\frac{BF}{BE} = \frac{FL}{EL} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{4}{EL} \Rightarrow EL = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$
 $BE = 6, EL = 2\sqrt{3}$

$RG \parallel BF, RE = BF = 3\sqrt{3}, ZG = FB - (FE + GB) = 3\sqrt{3} - (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = \sqrt{3}$
 $RZ = \sqrt{RG^2 + ZG^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\triangle BFM \sim \triangle BOZ$ т.к. $\angle MOR = \angle BOZ$ (т.к. они вертикальные), $ZB = MR = 2\sqrt{3}, \angle ZBM = \angle OMR$ т.к. это впис. напрям. угол
 или 2-ое $\parallel$ прям B, M и FB . следовательно $BO \perp OE$
 По теореме Пифагора. $ZB = \sqrt{BO^2 + ZO^2} = 2\sqrt{3} = \sqrt{9 + 3} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \sqrt{12} \Rightarrow 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
 следовательно $\triangle BOZ$ - прямоугольный: следовательно $BO \perp ZR$. следовательно $BO \perp \varphi$ следовательно $BM \perp \varphi$.

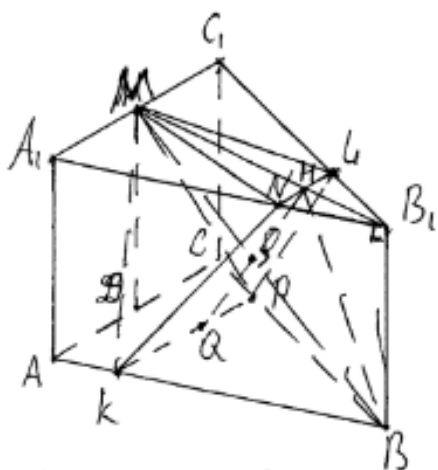
$V = \frac{1}{3} MO \cdot S_{KK_1LL_1} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot ((KK_1 + LL_1) \cdot RZ) = \frac{1}{3} (2 + 4) \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$
 $= 1 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
 Ответ: $6\sqrt{3}$.

Комментарий.

Доказательство утверждения в пункте а не обосновано. С использованием утверждения пункта а верно получен ответ в пункте б.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 14.5.2



а) BM перпендикулярна любой прямой, параллельной AC и лежащей в плоскости (ABC) по теореме о 3-х перпендикулярах $\Rightarrow BM \perp PK$

Проведём QH ($QH \perp NL$ и $QH \perp BC$ по т. Пифагора).

$QM \perp KP$; $QH \cap BM = O$ $\Delta OHM \sim \Delta B_1BM$ $\Rightarrow \angle MOH = \angle MB_1B = 90^\circ$. Т.к. $BM \perp PK$ и $BM \perp QH \Rightarrow BM \perp \gamma$. т.т.г.

б) (1) O делит BM пополам из ΔBMB_1 по т. Пифагора $BM = 6 \Rightarrow BO = 3$ Из ΔB_1LN по т. Пифагора $B_1N = \sqrt{3}$ Из ΔBNB_1 по т. Пифагора $BN = 2\sqrt{3}$ Из ΔBON по т. Пифагора $ON = \sqrt{3}$. (1) O делит QN пополам $\Rightarrow QN = 2ON = 2\sqrt{3}$

$$V_{MKPLN} = \frac{1}{3} \cdot MO \cdot S_{KPLN} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{2+4}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

($KPLN$ - р/б трапеция)

Ответ: $6\sqrt{3}$

Комментарий.

Утверждение в пункте а не доказано. В основе решения пункта б лежит необоснованное утверждение.

Оценка эксперта: 0 баллов.

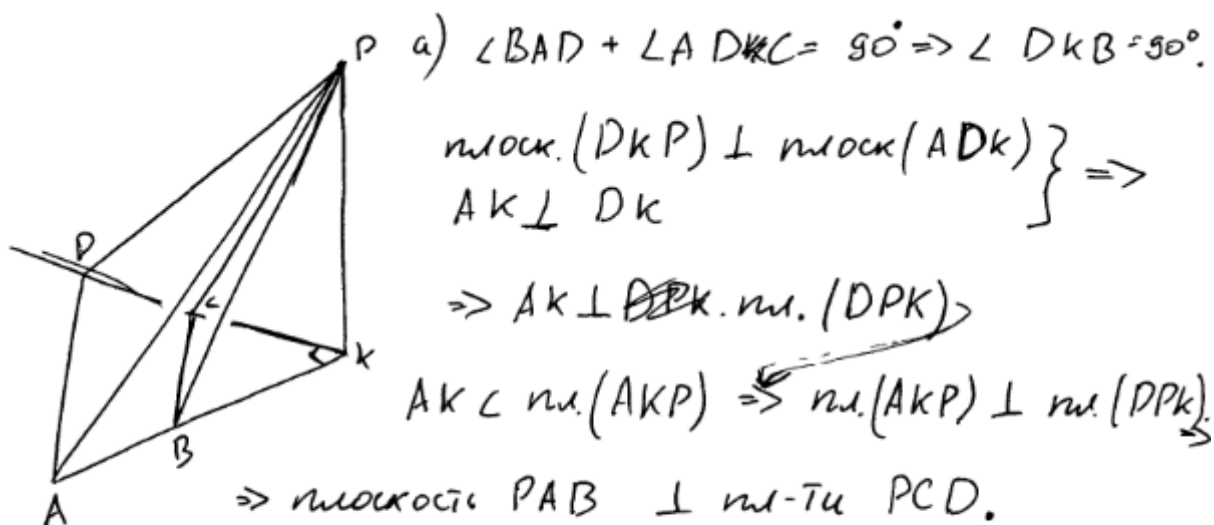
Пример 14.5.3

- 3) $\triangle BDK \sim \triangle BCA$ по 2-м углам ($\angle B$ -общий, $\angle BKO = \angle BAC$ как соотв.) $k_1 = \frac{2}{3}$ 4) аналогично $\triangle B_1EL \sim \triangle B_1A_1C_1$ $k_2 = \frac{1}{3}$
 5) из 3) и 4) $B_1O_1 = \frac{1}{3} B_1M$ $BO = \frac{2}{3} BF$
~~6) 6) $O_1M = B_1M - B_1O_1 = B_1M - \frac{1}{3} B_1M = \frac{2}{3} B_1M = \frac{2}{3} BF$~~
 7) $\triangle O_1HM = \triangle BOM$ по 2-м углам и стороне между ними ($\angle MO_1H = \angle HOB$ как накл. $\angle O_1MB = \angle MBO$ как н.л. $O_1M = \frac{2}{3} B_1M = \frac{2}{3} BF = BO$)

Вычисления

- 1) $B_1M = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ 2) $O_1M = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
 3) $O_1T \perp BF$ в (BFM) 4) $TO = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$
 5) по т. Пиф. $BM = \sqrt{9+27} = 6 \Rightarrow HM = BH = \frac{1}{2} \cdot BM = 3$
 6) $O_1O = \sqrt{9+9} = 2\sqrt{2} \Rightarrow O_1H = HO = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$
 7) по теор. обратной теореме Пифагора т.к.
 $O_1M^2 = O_1H^2 + HM^2 = 9 + 3 = 12$, то $\angle O_1HM = 90^\circ$ и $O_1H \perp MH$.
 8) $MR \perp AE$ (т.к. прямая правильная) и $MF \perp KD$ т.к. $KD \parallel AE$.
 9) т.к. $EL \parallel KD$, то $ELKD$ - трапеция
 10) XY - средняя линия т.р. $ELKD$ и $O_1H = HO \Rightarrow H \in XY$
 плоскости $(\in KD)$ 11) т.к. XV - линия т.р. $XV \parallel KD$ см. на обороте.

Пример 14.6.1



б) $AB = BC = CD = 4$.

$AB = CD \Rightarrow$ трапеция - равн. б. б. $\Rightarrow \angle KAD = \angle HDK \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle KBC = \angle BCK \Rightarrow BK = CK = \frac{CB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

$AK \perp$ пл. $(DPK) \Rightarrow AK \perp PK$.

пл. $(AKP) \perp$ пл. $(ADK) \Rightarrow DK \perp$ пл. $(APK) \Rightarrow DK \perp PK$
 $AK \perp DK$

$AK \perp PK$
 $DK \perp PK \Rightarrow PK \perp$ пл. $(ADK) \Rightarrow PK$ - высота.

$V_{KBSP} = \frac{1}{3} \cdot PK \cdot \frac{1}{2} \cdot CK \cdot BK = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} =$
 $= 3 \cdot 4 = 12$.

Ответ: $V_{KBSP} = 12$.

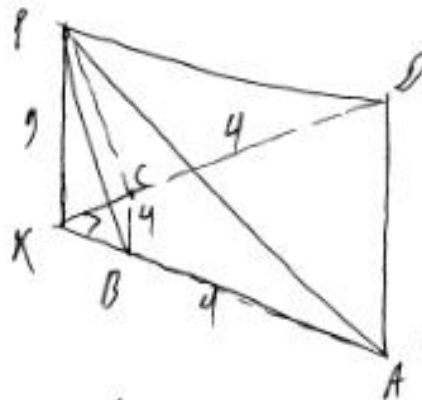
Комментарий.

Утверждение в пункте а не доказано. В решении пункта б обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 14.6.2

Дано:
 $PABCD$ - ч.п.
 $ABCD$ - трапеция ($AD \parallel BC$)
 $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$
 $AD \cap CD = K$
 а) Доказать: $PAB \perp PCD$
 б) Найти: V_{KCB} , если
 $AB = BC = CD = 4, PK = 9$



а) PK - высота пирамиды
 $\angle PKA = 180^\circ - (\angle BAP + \angle ADK) = 90^\circ$
 Заметим, что $\angle PKA$ - линейный

угол двугранного угла между плоскостями PAB и PCD ,
 в.к. $DK \perp PK$ и $AK \perp PK$.
 $\angle PKA = 90^\circ \Rightarrow PAB \perp PCD$, ч.т.д.

б) $AB = BC = CD = 4 \Rightarrow AD = 8$;
 $S_{ABCD} = \frac{4+8}{2} \sqrt{12} = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

$S_{KCB} \approx \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow \triangle KCB \sim \triangle KDA \Rightarrow S_{KCB} = \frac{S_{AKD}}{4} \Rightarrow$
 $\Rightarrow S_{KCB} = \frac{12\sqrt{3} + S_{KCB}}{4} \Rightarrow \frac{S_{KCB}}{4} = 3\sqrt{3} \Rightarrow S_{KCB} = 4\sqrt{3}$
 $V_{PKCB} = \frac{1}{3} PK \cdot S_{KCB} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4\sqrt{3} = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

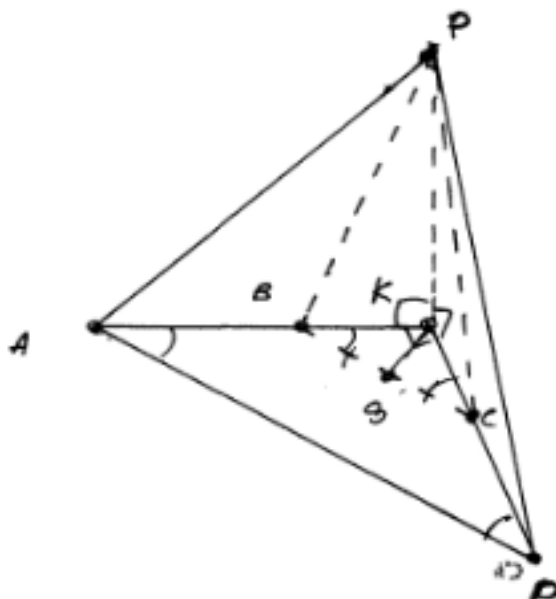
Ответ: $12\sqrt{3}$

Комментарий.

Утверждение в пункте а не доказано. В решении пункта б есть ошибочное утверждение, что привело к неверному ответу.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 14.6.3



Дано:
 $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$
 $(PAB) \perp (ADK)$
 $(PCD) \perp (ADK)$
 $ABCD$ - трапеция
 $K = AB \cap CD$

а) Док-ть: $PAB \perp PCD$

б) $V_{\text{квср}} = ?$, если:

$AB = BC = CD = 4$
 $PK = 9$

а) $BC \parallel AD$ (т.к. $ABCD$ - трапеция) $\Rightarrow \begin{cases} \angle KBC = \angle KAD \\ \angle KCB = \angle KDA \end{cases}$

(как внутр. одностор. и внутр. внешн. одностор. внешн. и внутр. при секущей AK и KD)

$\Rightarrow \angle KBC + \angle KCB = 90^\circ$ (по условию $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$)

$\Rightarrow \angle BKC = 90^\circ$ ($180^\circ - \angle KBC - \angle KCB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$)

Т.к. ~~$PAB \perp ADK$~~ $PAB \perp ADK$ и $PKD \perp ADK$, то

$\angle AKP = \angle DKP = 90^\circ \Rightarrow AK \perp PK$ и $AK \perp DK \Rightarrow$

$\Rightarrow PAK \perp PKD$ т.н.д.

б) $AB = CD \Rightarrow ABCD$ - равнобокая трапеция.
 $\angle BAD + \angle CDA = 90^\circ$
 $\angle BAD = \angle CDA$ (как углы при основании равнобок. трап.) $\Rightarrow \angle KBC = \angle KCB = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle KBC$ - равнобедр. прямоугольный треугол.

Опустим из K перпендикуляр на BC ; $KS \perp BC$; $BS = SC$
 (медиана = высота в равнобедр. $\triangle$) $\Rightarrow BS = 2$

$KB = \frac{BS}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{\cos 45^\circ} = 2\sqrt{2} = KC \Rightarrow S_{\triangle KBC} = \frac{1}{2} (2\sqrt{2})^2 = 4$

$V_{\text{квср}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle KBC} \cdot KP = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 9 = 12$ Ответ: 12.

Комментарий.

Утверждение в пункте а не доказано. В решении пункта б обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

3. Критерии проверки и оценка решений задания 15

Задание № 15 — это неравенство: дробно-рациональное, логарифмическое или показательное.

Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не степень следования «эталонному» решению.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением/ включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

В первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤» или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставить оценку «0 баллов».**

Задача 15 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2026 г.)

Решите неравенство $\frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2 + \log_2 x^4 + 1} \geq 0$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2 + 2\log_2 x^2 + 1} \geq 0; \quad \frac{\log_2(2-x) - \log_2(x+1)}{(\log_2 x^2 + 1)^2} \geq 0.$$

Значение знаменателя $(\log_2 x^2 + 1)^2$ не определено при $x = 0$, равно нулю при $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и

при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и положительно при других значениях x .

При $x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \neq 0$ и $x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ неравенство принимает вид:

$$\log_2(2-x) - \log_2(x+1) \geq 0; \quad \log_2(x+1) \leq \log_2(2-x); \quad 0 < x+1 \leq 2-x,$$

откуда $-1 < x \leq \frac{1}{2}$. Учитывая условия $x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \neq 0$ и $x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, получаем: $-1 < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0; \quad 0 < x \leq \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right); \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\frac{1}{2}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ИЛИ

Решите неравенство $\frac{27^x - 9^{x+1} + 3^{x+3} - 27}{50x^2 - 110x + 60,5} \geq 0$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\frac{3^{3x} - 3 \cdot 3^{2x} \cdot 3 + 3 \cdot 3^x \cdot 3^2 - 3^3}{0,5(100x^2 - 220x + 121)} \geq 0; \quad \frac{(3^x - 3)^3}{(10x - 11)^2} \geq 0.$$

Значение знаменателя $(10x-11)^2$ равно нулю при $x=1,1$ и положительно при других значениях x . При $x \neq 1,1$ неравенство принимает вид:

$$(3^x - 3)^3 \geq 0; \quad 3^x \geq 3,$$

откуда $x \geq 1$. Учитывая ограничение $x \neq 1,1$, получаем: $1 \leq x < 1,1$; $x > 1,1$.

Ответ: $[1; 1,1); (1,1; +\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 15.1

Решите неравенство $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4^{x^2} - 8 \cdot 2^{x^2} + 16} \geq 0$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\frac{(x+1)(x^2-1)}{(2^{x^2}-4)^2} \geq 0; \quad \frac{(x+1)^2(x-1)}{(2^{x^2}-4)^2} \geq 0.$$

Значение знаменателя $(2^{x^2}-4)^2$ равно нулю при $x = -\sqrt{2}$ и при $x = \sqrt{2}$ и положительно при других значениях x . При $x \neq -\sqrt{2}$ и $x \neq \sqrt{2}$ неравенство принимает вид

$$(x+1)^2(x-1) \geq 0,$$

откуда $x = -1$; $x \geq 1$. Учитывая ограничение $x \neq \sqrt{2}$, получаем: $x = -1$; $1 \leq x < \sqrt{2}$; $x > \sqrt{2}$.

Ответ: -1 ; $[1; \sqrt{2})$; $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -1 и/или 1 , ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 15.2

Решите неравенство $\frac{3^x + 9}{3^x - 9} + \frac{3^x - 9}{3^x + 9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1} + 144}{9^x - 81}$.

Решение.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t+9}{t-9} + \frac{t-9}{t+9} \geq \frac{12t+144}{t^2-81}; \quad \frac{t^2+18t+81}{(t-9)(t+9)} + \frac{t^2-18t+81}{(t-9)(t+9)} - \frac{12t+144}{(t-9)(t+9)} \geq 0;$$

$$\frac{2t^2-12t+18}{(t-9)(t+9)} \geq 0; \quad \frac{2(t-3)^2}{(t-9)(t+9)} \geq 0,$$

откуда $t < -9$; $t = 3$; $t > 9$.

При $t < -9$ получим: $3^x < -9$, решений нет.

При $t = 3$ получим: $3^x = 3$, откуда $x = 1$.

При $t > 9$ получим: $3^x > 9$, откуда $x > 2$.

Решение исходного неравенства:

$$x=1; x>2.$$

Ответ: 1; $(2; +\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 15.3

Решите неравенство $\log_8(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \geq \log_2(x^2 - 1) - 5$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_8(x-1)^3 \geq \log_2(x^2 - 1) - 5; \log_2(x-1) \geq \log_2(x-1) + \log_2(x+1) - 5.$$

Левая часть неравенства определена при $x > 1$.

При $x > 1$ неравенство принимает вид:

$$\log_2(x+1) \leq 5; 0 < x+1 \leq 32,$$

откуда $-1 < x \leq 31$. Учитывая ограничение $x > 1$, получаем: $1 < x \leq 31$.

Ответ: $(1; 31]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 31, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 15.4

Решите неравенство $\frac{4}{3^x - 27} \geq \frac{1}{3^x - 9}$.

Решение.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{4}{t-27} \geq \frac{1}{t-9}; \frac{3t-9}{(t-9)(t-27)} \geq 0; \frac{3(t-3)}{(t-9)(t-27)} \geq 0,$$

откуда $3 \leq t < 9$; $t > 27$.

При $3 \leq t < 9$ получим: $3 \leq 3^x < 9$, откуда $1 \leq x < 2$.

При $t > 27$ получим: $3^x > 27$, откуда $x > 3$.

Решение исходного неравенства: $1 \leq x < 2$; $x > 3$.

Ответ: $[1; 2)$; $(3; +\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 15.5

Решите неравенство $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$.

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} \leq \frac{1}{t - 4}; t - 6 - \frac{9t - 37}{(t-3)(t-4)} - \frac{t-3}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$$t - 6 - \frac{10}{t-3} \leq 0, \text{ где } t \neq 4; \frac{(t-1)(t-8)}{t-3} \leq 0, \text{ где } t \neq 4,$$

откуда $t \leq 1$; $3 < t < 4$; $4 < t \leq 8$.

При $t \leq 1$ получим: $2^x \leq 1$, откуда $x \leq 0$.

При $3 < t < 4$ получим: $3 < 2^x < 4$, откуда $\log_2 3 < x < 2$.

При $4 < t \leq 8$ получим: $4 < 2^x \leq 8$, откуда $2 < x \leq 3$.

Решение исходного неравенства:

$$x \leq 0; \log_2 3 < x < 2; 2 < x \leq 3.$$

Ответ: $(-\infty; 0]$; $(\log_2 3; 2)$; $(2; 3]$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 0 и/или 3, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 15.6

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_3(5(1-x)) \geq \log_3((2-x)(1-x)) - \log_3(x+4);$$

$$\log_3 5 + \log_3(1-x) \geq \log_3(2-x) + \log_3(1-x) - \log_3(x+4).$$

Неравенство определено при $-4 < x < 1$, поэтому при $-4 < x < 1$ неравенство принимает вид:

$$5 \geq \frac{2-x}{x+4}; \frac{6x+18}{x+4} \geq 0,$$

откуда $x < -4$; $x \geq -3$. Учитывая ограничение $-4 < x < 1$, получаем: $-3 \leq x < 1$.

Ответ: $[-3; 1)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки -3 , ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Примеры оценивания решений задания 15

Пример 15.1.1

Решите неравенство $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4^{x^2} - 8 \cdot 2^{x^2} + 16} \geq 0$.

Ответ: $-1; [1; \sqrt{2}); (\sqrt{2}; +\infty)$.

~ 15

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4^{x^2} - 8 \cdot 2^{x^2} + 16} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2(x+1) - (x+1)}{2^{2x^2} - 8 \cdot 2^{x^2} + 16} \geq 0$$

$$\frac{(x+1)(x^2-1)}{(2^{x^2}-4)^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2(x-1)}{(2^{x^2}-2^2)^2} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(x+1)^2(x-1)}{((2-1)(x^2-2))^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2(x-1)}{(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2} \geq 0$$

$\begin{cases} 1 \leq x < \sqrt{2} \\ x > \sqrt{2} \\ x = -1 \end{cases}$

Ответ: $\{-1\} \cup [1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.1.2

Решите неравенство $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4x^2 - 8 \cdot 2^{x^2} + 16} \geq 0$.

Ответ: $-1; [1; \sqrt{2}); (\sqrt{2}; +\infty)$.

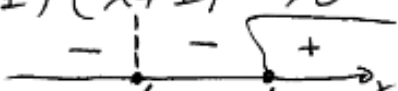
$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4x^2 - 8 \cdot 2^{x^2} + 16} \geq 0$$

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{(2^{x^2} - 4)^2} \geq 0$$

Заметим, что $(2^{x^2} - 4)^2 \geq 0$ - всегда, тогда, так как $(2^{x^2} - 4)^2$ стоит в знаменателе, то оно не должно быть равно 0 $\Rightarrow 2^{x^2} - 4 \neq 0 \Rightarrow 2^{x^2} \neq 4 \Rightarrow 2^{x^2} \neq 2^2 \Rightarrow x^2 \neq 2 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$. Тогда делением можно, считая, что $(2^{x^2} - 4)^2 \neq 0$ и > 0 :

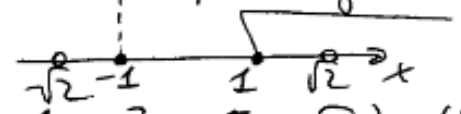
$$x^3 + x^2 - x - 1 \geq 0$$

$$(x-1)(x^2 + 2x + 1) \geq 0$$

$$(x-1)(x+1)^2 \geq 0$$


$$x \in \{-1\} \cup [1; +\infty)$$

считая, что, что знаменатель $\neq \pm\sqrt{2}$:



$$x \in \{-1\} \cup [1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.1.3

Решите неравенство $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4x^2 - 8 \cdot 2^{x^2} + 16} \geq 0$.

Ответ: $-1; [1; \sqrt{2}); (\sqrt{2}; +\infty)$.

$$\begin{aligned}
 15) \quad & \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4x^2 - 8 \cdot 2^{x^2} + 16} > 0 & (*) \\
 & & x \neq \pm \sqrt{2} \\
 & \frac{x^2(x+1) - (x+1)}{(2^{x^2} - 4)^2} > 0 \\
 & \frac{(x^2 - 1)(x+1)}{(x^2 - 2)^2} > 0 \\
 & \frac{(x-1)(x+1)^2}{(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2} > 0 \\
 & \begin{array}{ccccccc} - & \text{?} & - & \text{?} & - & + & \text{?} & + \\ \hline & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & -\sqrt{2} & & -1 & & 1 & & \sqrt{2} \end{array} \rightarrow x \\
 & \text{Ответ: } (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)
 \end{aligned}$$

Комментарий.

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -1 и 1 .

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 15.1.4

Решите неравенство $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4x^2 - 8 \cdot 2^{x^2} + 16} \geq 0$.

Ответ: $-1; [1; \sqrt{2}); (\sqrt{2}; +\infty)$.

№15,

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4x^2 - 8 \cdot 2^{x^2} + 16} \geq 0$$

$$\frac{x^2(x+1) - (x+1)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} \geq 0$$

$$\frac{(x^2-1)(x+1)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)(x+1)^2}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} \geq 0$$

$$4x^2 - 8 \cdot 2^{x^2} + 16 = 0$$

$$2^{x^2} = t, t > 0$$

$$t^2 - 8t + 16 = 0$$

$$(t-4)^2 = 0$$

$$t = 4$$

$$2^{x^2} = 4$$

$$x^2 = 2$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Ответ: $(-\sqrt{2}; -1] \cup (1; +\infty)$.

Комментарий.

Нарушена равносильность при переходе ко второму неравенству.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 15.2.1

Решите неравенство $\frac{3^x + 9}{3^x - 9} + \frac{3^x - 9}{3^x + 9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1} + 144}{9^x - 81}$.

Ответ: 1; $(2; +\infty)$.

№15.

$$\frac{3^x + 9}{3^x - 9} + \frac{3^x - 9}{3^x + 9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1} + 144}{9^x - 81}$$

$t = 3^x \quad t > 0$

$$\frac{t+9}{t-9} + \frac{t-9}{t+9} - \frac{12t+144}{(t-9)(t+9)} \geq 0$$

$$\frac{t^2 + 18t + 81 + t^2 - 18t + 81 - (12t + 144)}{(t-9)(t+9)} \geq 0$$

$$\frac{t^2 - 6t + 9}{(t-9)(t+9)} \geq 0$$

$$\frac{(t-3)^2}{(t-9)(t+9)} \geq 0$$

0 - 3 - 9

$3^x > 9 \quad 3^x = 9$
 $x > 2 \quad x = 2$

Ответ: $x = 1;$
 $x \in (2; +\infty)$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.2.2

Решите неравенство $\frac{3^x + 9}{3^x - 9} + \frac{3^x - 9}{3^x + 9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1} + 144}{9^x - 81}$.

Ответ: $1; (2; +\infty)$.

$$\begin{aligned}
 15) \quad & \frac{3^x + 9}{3^x - 9} + \frac{3^x - 9}{3^x + 9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1} + 144}{9^x - 81} \Leftrightarrow \frac{(3^x + 9)^2 + (3^x - 9)^2}{(3^x + 9)(3^x - 9)} - \frac{12 \cdot 3^x + 144}{(3^x + 9)(3^x - 9)} \geq 0 \quad \begin{matrix} t = 3^x \\ t \in (0, +\infty) \end{matrix} \\
 & \frac{t^2 + 18t + 81 + t^2 - 18t + 81 - 12t - 144}{(t+9)(t-9)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2 - 12t + 18}{(t+9)(t-9)} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 & \frac{t^2 - 6t + 9}{(t-9)(t+9)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-3)^2}{(t-9)(t+9)} \geq 0 \quad \begin{matrix} - & + & - \\ 0 & 3 & 9 \end{matrix} \Leftrightarrow \\
 & \begin{cases} t > 9 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > 9 \\ 3^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{Ответ: } \{1\} \cup (2; +\infty)
 \end{aligned}$$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.2.3

Решите неравенство $\frac{3^x+9}{3^x-9} + \frac{3^x-9}{3^x+9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}$.

Ответ: $1; (2; +\infty)$.

Задача 15

$$\frac{3^x+9}{3^x-9} + \frac{3^x-9}{3^x+9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1} + 144}{9^x - 81}$$

OD3: $\begin{cases} 3^x - 9 \neq 0 \\ 3^x + 9 \neq 0 \\ |9^x - 8| \neq 0 \end{cases}$

$$\boxed{3^x = t} \leftarrow \text{замени}$$

$$\begin{aligned} 9^x &= 3^{2x} = 3^x \cdot 3^x \\ 3^{x+1} &= 3^x \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3^x \neq 9 \\ 3^x \neq -9 \\ 9^x \neq 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\frac{(t+9)}{(t-9)} + \frac{(t-9)}{(t+9)} \geq \frac{4 \cdot 3 \cdot t + 144}{t^2 - 81}$$

$$\frac{(t+9)^2 + (t-9)^2 - 12t - 144}{t^2 - 81} \geq 0$$

$$\frac{t^2 + 18t + 81 + t^2 - 18t + 81 - 12t - 144}{(t-9)(t+9)} \geq 0$$

$$\frac{2t^2 - 12t + 18}{(t-3)(t+3)} \geq 0 \quad | :2$$

$$\frac{t^2 - 6t + 9}{(t-9)(t+9)} \geq 0$$

$$\frac{(t-3)^2}{(t-9)(t+9)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \tau \gg \tau_0$$

Обратная замена

$$\begin{array}{l} 3^x > 9 \\ 3^x > 3^2 \\ x > 2 \end{array} \quad \text{um} \quad \begin{array}{l} 3^x > 9 \\ \log_3 9 \leq x \\ 2 \leq x \end{array}$$

Ответ: $x \in (2; +\infty)$

Комментарий.

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 15.2.4

Решите неравенство $\frac{3^x + 9}{3^x - 9} + \frac{3^x - 9}{3^x + 9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1} + 144}{9^x - 81}$.

Ответ: 1; $(2; +\infty)$.

$$\sqrt{15}. \quad \frac{3^x + 9}{3^x - 9} + \frac{3^x - 9}{3^x + 9} \geq \frac{4 \cdot 3^{x+1} + 144}{9^x - 81}$$

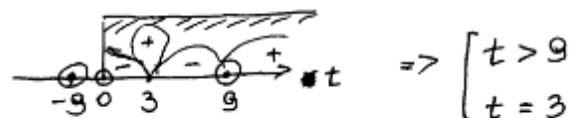
$\square t = 3^x$, тогда $t^2 = 9^x$, причём $t > 0$:

$$\frac{t+9}{t-9} + \frac{t-9}{t+9} \geq \frac{12t+144}{t^2-81}$$

$$\frac{t^2+81+18t+t^2-18t+81-12t-144}{(t-9)(t+9)} \geq 0$$

$$\frac{2t^2-12t+162-144}{(t-9)(t+9)} \geq 0 \quad | :2$$

$$\frac{t^2-6t+9}{(t-9)(t+9)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(t-3)^2}{(t-9)(t+9)} \geq 0$$



обр. замена: $\begin{cases} 3^x = 3 \\ 3^x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x \in \{1\} \cup (2; +\infty).$

Ответ: $x \in \{1\} \cup (2; +\infty)$.

Комментарий.

В работе допущена ошибка при решении дробно-рационального неравенства относительно t : на координатной прямой в точке $t=3$ (в «петле» стоит знак «+» — очевидно, попытка объяснить чередование знаков), то есть участник экзамена утверждает,

что дробное выражение $\frac{(t-3)^2}{(t-9)(t+9)}$ принимает положительное значение.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 15.3.1

Решите неравенство $\log_8(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \geq \log_2(x^2 - 1) - 5$.

Ответ: $(1; 31]$.

$\log_8(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \geq \log_2(x^2 - 1) - 5$ ОДЗ: 1) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > 0$
 $(x-1)(x^2 - 2x + 1) > 0$
 $(x-1)(x-1)^2 > 0$
 $(x-1)^3 > 0$
 $x-1 > 0$
 $x > 1$

По формуле куба разности:
 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$

Совмещаем ОДЗ:

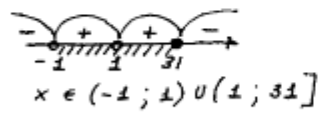
 $x \in (1; +\infty)$

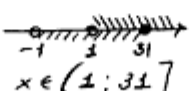
$\log_8(x-1)^3 \geq \log_2(x^2 - 1) - 5$
 $\frac{1}{3} \log_2(x-1)^3 - \log_2(x^2 - 1) \geq -5$
 $\log_2(x-1) - \log_2(x^2 - 1) \geq -5$
 $\log_2\left(\frac{x-1}{x^2 - 1}\right) \geq -5 \cdot \log_2 2$
 $\log_2\left(\frac{x-1}{x^2 - 1}\right) \geq \log_2 \frac{1}{32}$
 $\frac{x-1}{x^2 - 1} \geq \frac{1}{32}$

$\frac{x-1}{x^2 - 1} - \frac{1}{32} \geq 0$
 $\frac{32(x-1) - (x^2 - 1)}{32(x^2 - 1)} \geq 0$
 $\frac{32(x-1) - (x-1)(x+1)}{32(x^2 - 1)} \geq 0$
 $\frac{(x-1)(32 - x - 1)}{32(x^2 - 1)} \geq 0$
 $\frac{(x-1)(31 - x)}{32(x^2 - 1)} \geq 0$
 $\frac{(x-1)(31 - x)}{32(x^2 - 1)} = 0$

$(x-1)(31-x) = 0$
 $x-1=0 \quad 31-x=0$
 $x=1 \quad x=31$

$32(x^2 - 1) = 0$
 $x^2 - 1 = 0$
 $(x-1)(x+1) = 0$
 $x-1=0 \quad x+1=0$
 $x=1 \quad x=-1$


 $x \in (-1; 1) \cup (1; 31]$

Совмещаем ответ с ОДЗ:

 $x \in (1; 31]$

Ответ. $x \in (1; 31]$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

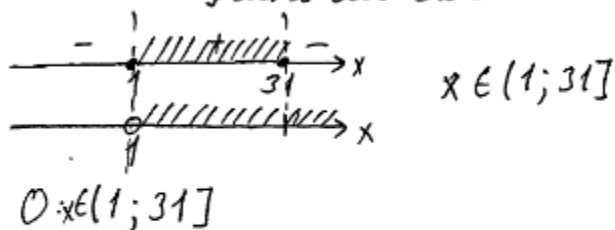
Пример 15.3.2

Решите неравенство $\log_8(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \geq \log_2(x^2 - 1) - 5$.

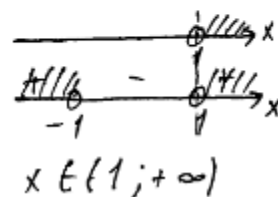
Ответ: $(1; 31]$.

$$\begin{aligned} \log_8(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) &\geq \log_2(x^2 - 1) - 5 \\ \log_2(x - 1)^3 &\geq \log_2(x^2 - 1) - \log_2 2^5 \\ \log_2(x - 1) &\geq \log_2 \frac{(x+1)(x-1)}{32} \\ x - 1 &\geq \frac{(x+1)(x-1)}{32} \quad x - 1 - \frac{(x+1)(x-1)}{32} \geq 0 \\ \frac{32(x-1) - (x+1)(x-1)}{32} &\geq 0 \quad \frac{(x-1)(32 - x - 1)}{32} \geq 0 \\ (x-1)(31-x) &\geq 0 \end{aligned}$$

Учитывая ОДЗ:



$$\begin{aligned} \text{ОДЗ: } &\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} (x-1)(x^2 - 2x + 1) > 0 \\ (x+1)(x-1) > 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} (x-1)(x-1)^2 > 0 \\ (x+1)(x-1) > 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} (x-1)^3 > 0 \\ (x+1)(x-1) > 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} x > 1 \\ (x+1)(x-1) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$



Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.3.3

Решите неравенство $\log_8(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \geq \log_2(x^2 - 1) - 5$.

Ответ: $(1; 31]$.

N15

$$\log_8(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \geq \log_2(x^2 - 1) - 5$$

$$\log_2(x-1)^3 - \log_2(x^2-1) + 5 \geq 0$$

$$\frac{1}{3}\log_2(x-1)^3 - \log_2(x^2-1) + 5 \geq 0$$

$$\log_2\sqrt[3]{(x-1)^3} - \log_2(x^2-1) + \log_2 32 \geq 0$$

$$\log_2(x-1) - \log_2(x^2-1) + \log_2 32 \geq 0$$

$$\log_2 \frac{(x-1) \cdot 32}{(x^2-1)} \geq 0$$

используем метод рационализации:

$$(2-1) \left(\frac{(x-1) \cdot 32}{x^2-1} - 1 \right) \geq 0$$

$$1 \cdot \frac{32x - 32 - x^2 + 1}{x^2-1} \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{x^2 - 32x + 31}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

решим отдельно числитель:

$$x^2 - 32x + 31 = 0$$

по т. Виета:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 31 \\ x_1 + x_2 = 32 \end{cases}$$

отсюда: $x_1 = 31$
 $x_2 = 1$

$$\frac{(x-31)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

с учетом (*)

$$x \in (1; 31)$$

Ответ: $x \in (1; 31]$

* ① $x^2 - 1 > 0$
② $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > 0$

① $x^2 - 1 > 0$
 $(x-1)(x+1) > 0$

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

② $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > 0$

$$\begin{array}{r|l} -x^3 - 3x^2 + 3x - 1 & \frac{x-1}{x^2-2x+1} \\ \hline x^3 - x^2 & \\ \hline -2x^2 + 3x & \\ \hline -2x^2 + 2x & \\ \hline -x - 1 & \\ \hline x - 1 & 0 \end{array}$$

$(x-1)(x^2-2x+1) > 0$
 $(x-1)(x-1)^2 > 0$
 $(x-1)^3 > 0$

отсюда: $x \in (1; +\infty)$

объединяя оба неравенства получаем:

Комментарий.

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 31.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 15.3.4

Решите неравенство $\log_8(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \geq \log_2(x^2 - 1) - 5$.

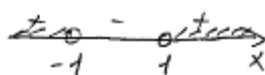
Ответ: $(1; 31]$.

$$\log_8(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \geq \log_2(x^2 - 1) - 5$$

$$\log_8(x-1)^3 \geq \log_2(x^2 - 1) - 5$$

О.Д.З.

$$\begin{cases} (x-1)^3 > 0 \\ (x^2 - 1) > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 1 \\ x^2 > 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$$

$$\log_2^3(x-1)^3 \geq \log_2(x^2 - 1) - \log_2 32$$

$$\frac{3}{3} \log_2(x-1) \geq \log_2(x^2 - 1) - \log_2 32$$

$$\log_2(x-1) + \log_2 32 \geq \log_2(x^2 - 1)$$

$$\log_2((x-1) \cdot 32) \geq \log_2(x^2 - 1)$$

$2 > 1 \Rightarrow$ знак неравенства не меняется

$$(x-1) \cdot 32 \geq x^2 - 1$$

$$32x - 32 \geq x^2 - 1$$

$$-x^2 + 32x - 32 + 1 \geq 0$$

$$-x^2 + 32x - 31 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 32x + 31 \leq 0$$

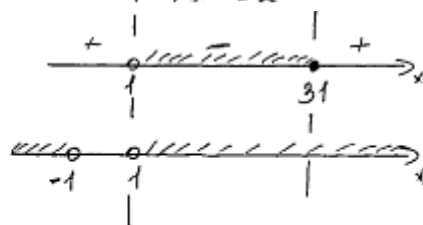
$$x^2 - 32x + 31 = 0$$

По Теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = 31$

$$x_1 + x_2 = 32$$

$$x_1 = 31$$

$$x_2 = 1$$



Ответ: $(1; 31]$

Комментарий.

Неверно решена система неравенств, названная О.Д.З.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 15.4.1

Решите неравенство $\frac{4}{3^x - 27} \geq \frac{1}{3^x - 9}$.

Ответ: $[1; 2); (3; +\infty)$.

$$\frac{4}{3^x - 27} \geq \frac{1}{3^x - 9}$$

Неравенство определено, если $x \neq 3$ и $x \neq 2$

Пусть $3^x = t$, запишем:

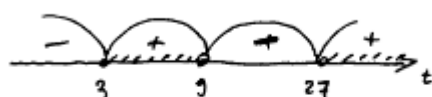
$$\frac{4}{t - 27} \geq \frac{1}{t - 9}$$

$$\frac{4}{t - 27} - \frac{1}{t - 9} \geq 0$$

$$\frac{4t - 36 - t + 27}{(t - 27)(t - 9)} \geq 0$$

$$\frac{3t - 9}{(t - 27)(t - 9)} \geq 0$$

$$t = 3 \quad t \neq 27 \quad t \neq 9$$



$$3 \leq t \leq 9$$

$$t \geq 27$$

$$3 \leq 3^x \leq 9$$

$$3^x \geq 27$$

$$1 \leq x \leq 2$$

$$x \geq 3$$

Так как $x \neq 3$ и $x \neq 2$, получим: $x \in [1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $[1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.4.2

Решите неравенство $\frac{4}{3^x - 27} \geq \frac{1}{3^x - 9}$.

Ответ: $[1; 2); (3; +\infty)$.

$$\begin{aligned} \frac{4}{3^x - 27} &\geq \frac{1}{3^x - 9} \\ \frac{4}{t - 27} &\geq \frac{1}{t - 9} \\ \frac{4t - 36 - t + 27}{(t - 27)(t - 9)} &\geq 0 \\ \frac{3t - 9}{(t - 27)(t - 9)} &\geq 0 \\ \frac{t - 3}{(t - 27)(t - 9)} &\geq 0 \end{aligned}$$

$3^x - 27 \neq 0, x \neq 3$
 $3^x - 9 \neq 0, x \neq 2$
 Замена
 $3^x = t$

$\begin{cases} t = 1 \\ t \neq 3 \\ t \neq 2 \end{cases}$

Возврат к замене

$t = 3$	$t = 27$	$t = 9$
$3^x = 3$	$3^x = 27$	$3^x = 9$
$x = 1$	$x = 3$	$x = 2$

Ответ: $[1; 2) \cup (3; +\infty)$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.4.3

Решите неравенство $\frac{4}{3^x - 27} \geq \frac{1}{3^x - 9}$.

ОТВЕТ: $[1; 2); (3; +\infty)$.

15) $\frac{4}{3^x-27} \geq \frac{1}{3^x-9}$ $\begin{cases} 3^x-27 \neq 0 \\ 3^x-9 \neq 0 \end{cases}$

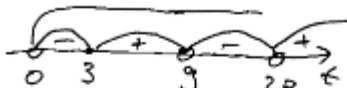
$3^x = t, t > 0$ $\begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$\frac{4}{t-27} \geq \frac{1}{t-9}$ $\begin{cases} t \neq 27 \\ t \neq 9 \end{cases}$

$\frac{4}{t-27} - \frac{1}{t-9} \geq 0$

$\frac{4t-36-t+27}{(t-27)(t-9)} \geq 0$

$\frac{3(t-3)}{(t-9)(t-27)} \geq 0$



$3 \leq t < 9$ $27 < t$

$3 \leq 3^x < 9$ $27 < 3^x$

$1 \leq x < 2$ $3 > 1 \Rightarrow \text{p.a. } 3^x \text{ logp.}$ $x > 3$ $3 > 1 \Rightarrow \text{p.a. } 3^x \text{ logp.}$

$x \in [1; 2) \cup (3; +\infty)$

Orber: $x \in [1; 2) \cup (3; +\infty)$

Комментарий.

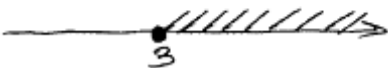
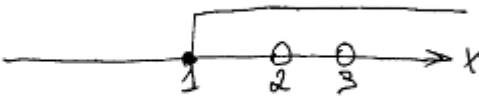
Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.4.4

Решите неравенство $\frac{4}{3^x - 27} \geq \frac{1}{3^x - 9}$.

Ответ: $[1; 2); (3; +\infty)$.

$$\begin{aligned} \frac{4}{3^x - 27} &\geq \frac{1}{3^x - 9} && \text{О.д.З.} \\ &&& x \neq 3 \\ \text{Замена } 3^x &= t && x \neq 2 \\ \frac{4}{t-27} &\geq \frac{1}{t-9} \\ \frac{4t-36-t+27}{(t-27)(t-9)} &\geq 0 \\ \frac{3t-9}{(t-27)(t-9)} &\geq 0 && \text{О.д.З.} \\ &&& t \neq 27, t \neq 9 \\ 3t-9 &\geq 0 \\ 3t &\geq 9 \\ t &\geq 3 \\ \text{О.р.З.} &&& \text{с учетом О.д.З.} \\ 3^x &\geq 3 \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$



$x \in [1; 2) \cup (3; +\infty)$

Ответ: $x \in [1; 2) \cup (3; +\infty)$

Комментарий.

Неверно решено дробно-рациональное неравенство относительно новой переменной.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 15.5.1

Решите неравенство $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$.

Ответ: $(-\infty; 0]; (\log_2 3; 2); (2; 3]$.

$$2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4};$$

$$2^x = t;$$

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} \leq \frac{1}{t - 4};$$

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{(t-3)(t-4)} \leq \frac{1}{t-4};$$

$$t - 6 - \frac{9t - 37 + t - 3}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$$t - 6 - \frac{10(t-4)}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$$\frac{(t-4)(t-6)(t-3) - 10}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$$\frac{(t-4)(t^2 - 9t + 8)}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$

$$\frac{(t-4)(t-1)(t-8)}{(t-3)(t-4)} \leq 0;$$



$$0 < 2^x \leq 1 \quad 3 < 2^x < 4 \quad 4 < 2^x \leq 8$$

$$\underline{x \leq 0}; \quad \begin{cases} x > \log_2 3; \\ x < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2; \\ x \leq 3; \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 0] \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3].$$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.5.2

Решите неравенство $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$.

Ответ: $(-\infty; 0]; (\log_2 3; 2); (2; 3]$.

$$2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$$

Положим $2^x = t$ Тогда

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{(t-4)(t-3)} \leq \frac{1}{t-4}$$

ОДЗ $\begin{cases} t \neq 4 \\ t \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x \neq 4 \\ 2^x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq \log_2 3 \end{cases}$

$$\frac{t^3 - 13t^2 + 54t - 72 - 9t + 37 - t + 3}{(t-4)(t-3)} \leq 0$$

$$\frac{t^3 - 13t^2 + 44t - 32}{(t-4)(t-3)} \leq 0$$

$$\frac{(t-4)(t^2 - 9t + 8)}{(t-4)(t-3)} \leq 0$$

$$\frac{t(t-1)(t-8)}{t-3} \leq 0$$

Вернемся

$$\frac{(2^x - 1)(2^x - 8)}{2^x - 3} \leq 0$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3]$

Комментарий.

В решении содержится запись «ОДЗ», которая может трактоваться по-разному. Получен неверный ответ, но он отличается от верного только исключением точки 3.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 15.5.3

Решите неравенство $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$.

Ответ: $(-\infty; 0]; (\log_2 3; 2); (2; 3]$.

$$2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$$

Положим $2^x = t$, то $t - 6 - \frac{9t - 37}{t^2 - 7t + 12} - \frac{1}{t - 4} \leq 0$
 $t^2 - 7t + 12 = 0 \quad (t-3)(t-4)$

$\Delta = 49 - 4 \cdot 12 = 1$ $t - 6 - \frac{9t - 37}{(t-3)(t-4)} - \frac{1}{t-4} \leq 0$
 $t_1 = \frac{7-1}{2} = 3$
 $t_2 = \frac{7+1}{2} = 4$

$$\frac{(t^2 - 7t + 12)(t-6) - (9t - 37) - (t-3)}{(t-3)(t-4)} \leq 0$$

$$\frac{(t^2 - 7t^2 + 12t - 6t^2 + 42t - 72) - (9t - 37) - (t-3)}{(t-3)(t-4)} \leq 0$$

$$t^3 - 13t^2 + 54t - 72 - 9t + 37 - t + 3 \leq 0$$

$$t^3 - 13t^2 + 44t - 32 \leq 0$$

Схема Горнера: Положим $t_1 = 1$, то
 $1 - 13 + 44 - 32 = 0$ - подходит

	1	-13	44	-32
1	1	-12	32	0

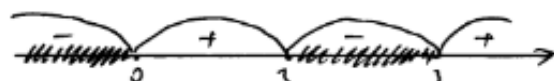
$$(t-1)(t^2 - 12t + 32) \leq 0$$

$$t^2 - 12t + 32 = 0$$

$\Delta = 144 - 4 \cdot 32 = 144 - 128 = 16$
 $t_3 = \frac{12-4}{2} = 4$ $t_4 = \frac{12+4}{2} = 8$

$t_1 = 1$ $t_2 = 4$ $t_3 = 8$
 $2^x = 1$ $2^x = 4$ $2^x = 8$
 $x_1 = 0$ $x_2 = 2$ $x_3 = 3$

$x \in (-\infty; 0] \cup [2; 3]$



Ответ: $(-\infty; 0] \cup [2; 3]$

Комментарий.

В решении неравенства допущена ошибка – неравносильный переход.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 15.6.1

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$.

Ответ: $[-3; 1)$.

$$\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$$

ОДЗ:

$$5(1-x) > 0$$

$$x^2-3x+2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) > 0$$

$$x > -4$$

$$\log_3(5-5x) \geq \log_3 \frac{x^2-3x+2}{x+4}$$

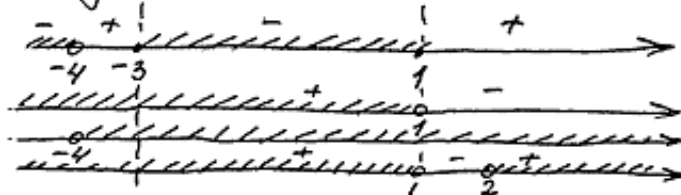
$3 > 1 \Rightarrow$ функция монотонно возрастает

$$\Rightarrow 5-5x \geq \frac{x^2-3x+2}{x+4} \Rightarrow \frac{(5-5x)(x+4) - x^2 + 3x - 2}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{5x+20-5x^2-20x-x^2+3x-2}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{-6x^2-12x+18}{x+4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-3}{x+4} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(x-1)}{x+4} \leq 0$$

~~метод интервалов~~



$$\Rightarrow x \in [-3; 1)$$

Ответ: $[-3; 1)$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 15.6.2

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$.

Ответ: $[-3; 1)$.

$$\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$$

$$\text{ОДЗ. } \begin{cases} 5-5x > 0 \\ x^2-3x+2 > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < 1; x > 2 \\ x > -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (-4; 1); (2; +\infty)$$

$$\log_3(5-5x) + \log_3(x+4) \geq \log_3(x^2-3x+2)$$

$$\log_3(5-5x) \cdot (x+4) \geq \log_3(x^2-3x+2)$$

$\log_3$ - монотонно возрастающая функция
знак неравенства не меняем.

$$(5-5x) \cdot (x+4) \geq x^2-3x+2$$

$$-5x^2-12x+18 \geq 0 \quad | : -5$$

$$x^2+2x-3 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) \leq 0$$



$$\begin{cases} x \in [-3; 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-4; 1); (2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; 1)$$

$$\text{Ответ: } [-3; 1)$$

Комментарий.

Система неравенств в ОДЗ решена неверно (не вычислительная ошибка). Также неверно решено логарифмическое неравенство.

Оценка эксперта: 0 баллов.

4. Критерии проверки и оценка решений задания 16

Задание № 16 — это текстовая задача с экономическим содержанием.

Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не степень следования «эталонному» решению.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Подробнее: 1 балл можно выставить в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи, но именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию, и т.п. Предъявленный текст должен включать описание того, как построена модель.

Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведён к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях оценивания нет жёсткого упоминания какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Задача 16 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2026 г.)

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на r % по сравнению с концом предыдущего года (r — целое число);
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2030 года долг должен составить 200 тыс. рублей;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей. Найдите r .

Решение. По условию долг (в тыс. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

800; 680; 560; 440; 320; 200; 160; 120; 80; 40; 0.

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$. Тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на январь такова:

$800k$; $680k$; $560k$; $440k$; $320k$; $200k$; $160k$; $120k$; $80k$; $40k$.

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$800k - 680$; $680k - 560$; $560k - 440$; $440k - 320$; $320k - 200$;

$200k - 160$; $160k - 120$; $120k - 80$; $80k - 40$; $40k$.

Значит, сумма всех платежей (в тыс. рублей) будет составлять:

$$5(560k - 440) + 5(120k - 80) = 3400k - 2600.$$

Получаем: $3400k - 2600 = 1480$, откуда $k = 1,2$ и $r = 20$.

Ответ: 20.

ИЛИ

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму A млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2028 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно A , если общая сумма платежей в 2028 году составит 17 925 тыс. рублей?

Решение.

По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться на $\frac{1000A}{24} = \frac{125A}{3}$ тыс. рублей, следовательно, по состоянию на 15 декабря

2027 года и на 15-е число каждого месяца 2028 года долг (в тыс. рублей) должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$500A; \frac{1375A}{3}; \frac{1250A}{3}; \dots; \frac{250A}{3}; \frac{125A}{3}; 0.$$

Первого числа каждого месяца 2028 года долг возрастает на 3 %, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1,03 \cdot 500A; 1,03 \cdot \frac{1375A}{3}; \dots; 1,03 \cdot \frac{250A}{3}; 1,03 \cdot \frac{125A}{3}.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$\frac{125A}{3} + 15A; \frac{125A}{3} + 13,75A; \dots; \frac{125A}{3} + 2,5A; \frac{125A}{3} + 1,25A.$$

Всего следует выплатить в 2028 году

$$12 \cdot \frac{170A + 128,75A}{2 \cdot 3} = 597,5A \text{ тыс. рублей,}$$

откуда $597,5A = 17\,925$; $A = 30$.

Ответ: 30.

Задание 16.1

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
 - к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.
- Чему равно r , если общая сумма платежей в 2027 году составит 4830 тыс. рублей?

Решение.

По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться на $\frac{9000}{36} = 250$ тыс. рублей, следовательно, по состоянию на 15 декабря 2026 года и на 15-е число каждого месяца 2027 года долг (в тыс. рублей) должен уменьшаться до 6000 тыс. рублей следующим образом:

$$9000; 8750; 8500; \dots; 6500; 6250; 6000.$$

Первого числа каждого месяца 2027 года долг возрастает на $r\%$, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$(1+0,01r) \cdot 9000; (1+0,01r) \cdot 8750; \dots; (1+0,01r) \cdot 6500; (1+0,01r) \cdot 6250.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$250+90r; 250+87,5r; \dots; 250+65r; 250+62,5r.$$

Всего следует выплатить в 2027 году (в тыс. рублей)

$$12 \cdot \frac{250+90r+250+62,5r}{2} = 915r + 3000,$$

откуда $915r + 3000 = 4830$; $915r = 1830$; $r = 2$.

Ответ: 2.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 16.2

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 77 200 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Решение.

Пусть сумма кредита составляет S рублей, а ежегодные выплаты X рублей. По условию, долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S, \frac{6}{5} \cdot S - X, \left(\frac{6}{5}\right)^2 S - \frac{6}{5} \cdot X - X, \left(\frac{6}{5}\right)^3 S - \left(\frac{6}{5}\right)^2 X - \frac{6}{5} \cdot X - X = 0,$$

откуда

$$X = \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{5} - 1\right)}{\left(\frac{6}{5}\right)^3 - 1} \cdot S = \frac{216}{455} \cdot S; \quad 3X - S = \frac{193}{455} \cdot S = 77\,200.$$

Получаем $S = 182\,000$ рублей.

Ответ: 182 000.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 16.3

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

Решение.

Пусть долг в июле 2030 года составит B тыс. рублей.

По условию долг (в тыс. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$1300; 1040 + 0,2B; 780 + 0,4B; 520 + 0,6B; 260 + 0,8B; \\ B; 0,8B; 0,6B; 0,4B; 0,2B; 0.$$

В январе каждого года долг возрастает на 20 %, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на январь такова:

$$1560; 1248 + 0,24B; 936 + 0,48B; 624 + 0,72B; 312 + 0,96B; \\ 1,2B; 0,96B; 0,72B; 0,48B; 0,24B.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$520 - 0,2B; 468 - 0,16B; 416 - 0,12B; 364 - 0,08B; 312 - 0,04B; \\ 0,4B; 0,36B; 0,32B; 0,28B; 0,24B.$$

Значит, сумма всех платежей (в тыс. рублей) будет составлять:

$$5(416 - 0,12B) + 5 \cdot 0,32B = 2080 + B.$$

Получаем: $2080 + B = 2580$, откуда $B = 500$.

Долг в июле 2030 года составит 500 тыс. рублей.

Ответ: 500 тыс. рублей.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 16.4

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

Решение.

Пусть платежи в 2027 и 2028 годах составят по x тыс. рублей.

В январе 2027 года долг (в тыс. рублей) будет равен 960, а в июле равен $960 - x$. В январе 2028 года долг будет равен $1152 - 1,2x$, а в июле равен $1152 - 2,2x$. В январе 2029 года долг будет равен $1382,4 - 2,64x$. По условию, к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью, значит, платёж в 2029 году должен быть равен $(1382,4 - 2,64x)$ тыс. рублей, а сумма всех платежей будет составлять $(1382,4 - 0,64x)$ тыс. рублей. Получаем:

$$1382,4 - 0,64x = 1254,4; \quad 0,64x = 128,$$

откуда $x = 200$.

Платёж в 2027 году должен быть равен 200 тыс. рублей.

Ответ: 200 тыс. рублей.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 16.5

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

Решение.

По условию, долг перед банком (в млн руб.) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0.$$

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k; 0,9k; 0,8k; 0,7k; 0,6k; 0,5k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k - 0,9; 0,9k - 0,8; 0,8k - 0,7; 0,7k - 0,6; 0,6k - 0,5; 0,5k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$\begin{aligned} & k(1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) - (0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) = \\ & = (k - 1)(1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) + 1 = 4,5(k - 1) + 1. \end{aligned}$$

По условию, общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб., значит,

$$4,5(k - 1) + 1 > 1,2; 4,5 \cdot \frac{r}{100} + 1 > 1,2; r > 4\frac{4}{9}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства – число 5.

Значит, искомое число процентов – 5.

Ответ: 5.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Задание 16.6

15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

Решение.

Пусть сумма кредита равна S . По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S, \frac{38S}{39}, \dots, \frac{2S}{39}, \frac{S}{39}, 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$kS, \frac{38kS}{39}, \dots, \frac{2kS}{39}, \frac{kS}{39}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S + \frac{S}{39}, \frac{38(k-1)S + S}{39}, \dots, \frac{2(k-1)S + S}{39}, \frac{(k-1)S + S}{39}.$$

Всего следует выплатить $S + S(k-1) \left(1 + \frac{38}{39} + \dots + \frac{2}{39} + \frac{1}{39} \right) = S(1 + 20(k-1))$.

Общая сумма выплат на 20% больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$20(k-1) = 0,2; \quad k = 1,01; \quad r = 1.$$

Ответ: 1.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Примеры оценивания решений задания 16

Пример 16.1.1

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно r , если общая сумма платежей в 2027 году составит 4830 тыс. рублей?

Ответ: 2.

№ 16	
Пример 7-е число - день рождения	
$(1 + \frac{1}{100}) = b$	
Дата	Сумма долга
15 окт 2022	9 млн
1 окт 2022	9 б
7 окт 2022	$\Rightarrow$ д.б. $9b - \frac{9b}{4} = \frac{36b - 9b}{4} = \frac{27b}{4}$
15 окт	$9 - \frac{9}{4} = 9 - \frac{1}{4} = \frac{36 - 1}{4} = \frac{35}{4}$
1 окт	$\frac{35}{4} b$
7 окт 2022	$\Rightarrow$ д.б. $\frac{35b - 34}{4}$
15 окт 2 мес	$\frac{34}{4} 9 - 2 \cdot \frac{3}{36} = 9 - \frac{2}{3} = \frac{36 - 2}{3} = \frac{34}{3}$
1 окт	$\frac{34}{3} b$
7 окт 2022	$\Rightarrow$ д.б. $\frac{34b - 33}{4}$
15 окт 3 мес	$\frac{33}{4}$
...	...
7 окт 2022	...
15 окт 2022 (14 мес)	$\frac{25}{4}$
1 окт	$\frac{25}{4} b$
7 окт 2022	$\Rightarrow$ д.б. $\frac{25b - 24}{4}$
15 окт 12 мес	$\frac{24}{4}$
...	...
15 окт 35 мес	$\frac{1}{4}$
1 окт	$\frac{1}{4} b$
7 окт	$\Rightarrow$ д.б. $\frac{1}{4} b$
15 окт 36 мес	0

Выплаты образуют арифметическую прогрессию. Выплату можно формулой:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Общая сумма выплат в 2027 году =
~~4830 тыс.~~ = 4,83 млн

$$\begin{aligned} & 0. \overline{C.B} \text{ of } 20272. = \\ & = \frac{\frac{366-35}{4} + \frac{256-24}{4}}{2} \cdot 12 = 4,83 \cdot 12 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{366-35}{4} + \frac{256-24}{4} \right) \cdot 12 = 9,66$$

$$\left(\frac{616-59}{4}\right) \cdot 12 = 9,66$$

$$(616-59) \cdot 3 = 9,66 \quad 1:3$$

$$616 - 59 = 3,22$$

$$616 = \frac{322}{100} + \frac{5900}{100}$$

$$616 = \frac{6222}{100} \quad 1:61$$

$$b = \frac{6222}{6100} = 1 \frac{122}{6100}$$

$$(1 + \frac{r}{100}) = b$$

$$1 + \frac{r}{100} = 1 + \frac{122}{6100}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{122}{6100} \cdot 100$$

$$r = \frac{122}{61} = 2$$

Orbiter: 2

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.1.2

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно r , если общая сумма платежей в 2027 году составит 4830 тыс. рублей?

Ответ: 2.

N16

ПУСТЬ S – сумма, которую взяли в кредит (9000 тыс.)

$\frac{r}{100}$ – возрастание долга ^т каждый месяц.

месц.	долг	наращение %	выплата	итог месяца
1.	S	$\frac{r}{100} S$	$\frac{r}{100} S + \frac{S}{36}$	$\frac{35S}{36}$
2.	$\frac{35S}{36}$	$\frac{r}{100} \cdot \frac{35S}{36}$	$\frac{r}{100} \cdot \frac{35S}{36} + \frac{S}{36}$	$\frac{34S}{36}$
3.	$\frac{34S}{36}$	$\frac{r}{100} \cdot \frac{34S}{36}$	$\frac{r}{100} \cdot \frac{34S}{36} + \frac{S}{36}$	$\frac{33S}{36}$
Арифметическая прогрессия				
...				
12	$\frac{25S}{36}$	$\frac{r}{100} \cdot \frac{25S}{36}$	$\frac{r}{100} \cdot \frac{25S}{36} + \frac{S}{36}$	$\frac{24S}{36}$

2027г.
сумма выплат = 4830 тыс. $\Rightarrow$ это первые 12 выплат

$$\frac{r}{100} S + \frac{S}{36} + \frac{r \cdot 35 S}{100 \cdot 36} + \frac{S}{36} + \dots + \frac{r}{100} \cdot \frac{25}{36} S + \frac{S}{36} = 4830$$

$$\frac{12 S}{36} + \frac{r}{100} \left(\frac{S + \frac{25}{36} S}{2} \cdot 12 \right) = 4830$$

$$\frac{S}{3} + \frac{r}{100} \left(\frac{61 \cdot S \cdot 6}{36} \right) = 4830$$

$$3000 + \frac{r}{100} \left(\frac{9000 \cdot 61 \cdot 6}{36} \right) = 4830$$

$$90r \cdot 61 \cdot 6 = 1830 \cdot 36$$

$$r = \frac{1830 \cdot 36}{90 \cdot 61 \cdot 6} = \frac{183 \cdot 36}{9 \cdot 61 \cdot 6} = \frac{3 \cdot 36}{9 \cdot 6} = \frac{36}{18} = 2$$

Ответ: 2

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.1.3

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно r , если общая сумма платежей в 2027 году составит 4830 тыс. рублей?

Ответ: 2.

r - процентная ставка
 $k = 1 + \frac{r}{100}$ - коэффициент
 x - величина, на которую уменьшается долг со 2-го по 14-ое число

№ п/п	Долг с 1-го (млн руб.)	Платеж (млн руб.)	Остаток (млн руб.)
0	—	—	$9 = x$
1	$9k$	$9k - \frac{35}{4}$	$9 - 9x = 9 - \frac{35}{4}$
2	$\frac{35}{4}k$	$\frac{35}{4}k - \frac{34}{4}$	$9 - 9 \cdot 2x = \frac{34}{4}$
...	...	...	...
34	...	...	$9 - 34x = \frac{1}{4}$
35	$\frac{1}{4}k$	$\frac{1}{4}k - \frac{1}{4}$	$9 - 35x = \frac{1}{4}$
36	$\frac{1}{4}k$	$\frac{1}{4}k$	$9 - 36x = 0$

$x = \frac{1}{4}$

Платежи с 1-го по 12-й месяц составляют убывающую арифметическую прогрессию.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad S_{36} = \left(9k - \frac{35}{4} + \frac{1}{4}k\right) \frac{36}{2}$$

№ п/п	Долг с 1-го (млн руб.)	Платеж (млн руб.)	Остаток (млн руб.)
11	$\frac{26}{4}k$	$\frac{26}{4}k - \frac{25}{4}$	$9 - 11x = \frac{25}{4}$
12	$\frac{25}{4}k$	$\frac{25}{4}k - \frac{24}{4}$	$9 - 12x = \frac{24}{4}$
...	...	...	...

Платежи с 1-го по 12-й месяц составляют убывающую арифметическую прогрессию.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad S_{12} = \left(9k - \frac{25}{4} + \frac{25}{4}k - \frac{24}{4}\right) \frac{12}{2} = 4,83$$

$$\left(\frac{6,9}{4}k - \frac{5,9}{4}\right)6 = 4,83$$

$$15,25k - 14,75 = 0,805$$

$$15,25k = 15,555$$

$$k = 1,2 = 1\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{r}{100} = 1\frac{1}{5} - 1 = \frac{1}{5}$$

$$r = \frac{100}{5} = 20$$

Ответ: 20

Комментарий.

Верно построена математическая модель. Ошибка допущена при делении 15,555 на 15,25.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 16.1.4

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно r , если общая сумма платежей в 2027 году составит 4830 тыс. рублей?

Ответ: 2.

$$\begin{aligned} S &= 9 \text{ млн руб.} = 9000 \text{ тыс. руб.} \\ n &= 36 \text{ мес.} \\ r &= \text{процент} = 1\% = 1 + \frac{r}{100} \\ \Delta &= \frac{S}{n} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_{35}, x_{36} &- \text{выпн.} \\ 9 &\rightarrow 9 - \frac{1}{4} = \frac{35}{4} \rightarrow \frac{34}{4} \rightarrow \frac{33}{4} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{2}{4} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow 0 \\ 2027: \\ 1) \quad 9 \text{ млн} - x_1 &= \frac{35}{4} \Rightarrow x_1 = 9 \text{ млн} - \frac{35}{4} \\ 2) \quad \frac{35}{4} \text{ млн} - x_2 &= \frac{34}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{35}{4} \text{ млн} - \frac{34}{4} \\ 3) \quad \frac{34}{4} \text{ млн} - x_3 &= \frac{33}{4} \Rightarrow x_3 = \frac{34}{4} \text{ млн} - \frac{33}{4} \\ \dots \\ 11) \quad \frac{26}{4} \text{ млн} - x_{11} &= \frac{25}{4} \Rightarrow x_{11} = \frac{26}{4} \text{ млн} - \frac{25}{4} \\ 12) \quad \frac{25}{4} \text{ млн} - x_{12} &= \frac{24}{4} \Rightarrow x_{12} = \frac{25}{4} \text{ млн} - \frac{24}{4} \\ 2028: \\ 13) \quad \frac{24}{4} \text{ млн} - x_{13} &= \frac{23}{4} \Rightarrow x_{13} = \frac{24}{4} \text{ млн} - \frac{23}{4} \\ 14) \quad \frac{23}{4} \text{ млн} - x_{14} &= \frac{22}{4} \Rightarrow x_{14} = \frac{23}{4} \text{ млн} - \frac{22}{4} \\ \dots \\ 24) \quad \frac{13}{4} \text{ млн} - x_{24} &= \frac{12}{4} \Rightarrow x_{24} = \frac{13}{4} \text{ млн} - \frac{12}{4} \\ \dots \\ \text{Заметим, что } x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{11} + x_{12} &= 4830, \text{ тогда} \\ 9 \text{ млн} - \frac{35}{4} + \frac{35}{4} \text{ млн} - \frac{34}{4} + \frac{34}{4} \text{ млн} - \frac{33}{4} + \dots + \frac{25}{4} \text{ млн} - \frac{24}{4} &= 4830 \Rightarrow \\ x & \end{aligned}$$

Комментарий.

Неверно построена математическая модель. Платежи вычислены в млн рублей, а сумма платежей в 2027 году приравнена к 4830 тыс. рублей.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 16.2.1

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 77 200 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Ответ: 182 000.

№16	Долг после %	Выплата	Долг 20 %	После 3-го года в кредит
0)			S	$r = 1,2$
1)	$r \cdot S$	x	$r \cdot S - x$	x - ежегодн. выплата
2)	$(r \cdot S - x) \cdot r$	x	$(r \cdot S - x) \cdot r - x$	
3)	$((r \cdot S - x \cdot r) - x) \cdot r$	x	0	

$$((r \cdot S - x) \cdot r - x) \cdot r - x = 0$$

$$((1,2 \cdot S - x) \cdot 1,2 - x) \cdot 1,2 - x = 0$$

$$(1,44S - 2,2x) \cdot 1,2 - x = 0$$

$$1,728S - 3,64x = 0$$

$$1,728(3x - 77200) - 3,64x = 0$$

$$5,184x - 3,64x - 133401,6 = 0$$

$$1,544x = 133401,6$$

$$x = 86400 \text{ руб.}$$

$$S = \cancel{86400 \cdot 3 - 77200} = 86400 \cdot 3 - 77200 = 182000 \text{ руб.}$$

Ответ: 182000 руб.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.2.2

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 77 200 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Ответ: 182 000.

Задача №16 Пусть S — сумма, взятая в кредит; $r = 1,2$; A — сумма выплат

БАНК	ВЫПЛАТА	ДОЛГ	
S	A	S	$Sr^3 - Ar^2 - Ar - A = 0$
$(Sr-A)r$	A	$Sr-A$	$3Ar^3 - 77200r^3 - Ar^2 - Ar - A = 0$
$((Sr-A)r-A)r$	A	$(Sr-A)r-A$	$A(3r^3 - r^2 - r - 1) = 77200r^3$
		0	$A = \frac{77200r^3}{3r^3 - r^2 - r - 1} = \frac{77200 \times 1,728}{1,544} = 86400$

$$3A - 77200 = S$$

$$S = 3 \times 86400 - 77200 = 182000$$

Ответ: 182000 рублей

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.2.3

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 77 200 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Ответ: 182 000.

16) S - сумма, взятая в кредит
 m - одна из трёх равных выплат

	долг	долг с %	выплат.
I	S	$1,2 \cdot S$	m
II	$1,2 \cdot S - m$	$1,2 \cdot (1,2 \cdot S - m)$	m
III	$1,2 \cdot (1,2 \cdot S - m) - m$	$1,2 \cdot (1,2 \cdot (1,2 \cdot S - m) - m)$	m

$$1,2 \cdot (1,2 \cdot (1,2 \cdot S - m) - m) = m$$

$$1,44 \cdot (1,2 \cdot S - m) = 2,2 m$$

$$1,728 \cdot S = 3,64 m$$

Из услов. известно; $3m = S + 77200$

$$m = \frac{S + 77200}{3}$$

$$1,728 \cdot S = \frac{3,64 \cdot (S + 77200)}{3} \quad | \cdot 3$$

$$5,184 \cdot S = 3,64 S + 364 \cdot 772$$

$$1,544 S = 364 \cdot 772$$

$$S = \frac{364 \cdot 772 \cdot 1000}{1544} = 157000 \text{ руб.}$$

Ответ: 157 000 руб.

Комментарий.

Верно построена математическая модель. Ошибка допущена при делении 364 на 2.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 16.2.4

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 77 200 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Ответ: 182 000.

№16

Пусть кредит был взят на сумму S тыс. руб. ($S > 0$) и каждый из ~~трёх~~ трёх равных платежей равен x тыс. руб. ($x > 0$).

Когда долг увеличивается на 20%, он увеличивается в $1 + \frac{20}{100} = 1,2$ раза

составим мат. модель долга:

$$\underbrace{(1,2S - x) \cdot 1,2 - x}_{\text{долг на июль 2023}} - x = 0$$

долг на июль 2024

$$1,2^3 S - 1,2^2 x - 1,2x - x = 0$$

$$1,728S = x(1,44 + 1,2 + 1)$$

$$1,728S = 3,64x \Rightarrow x = \frac{1,728S}{3,64} = \frac{122,8S}{264} = \frac{43,2}{91}S = \frac{34}{70}S$$

общая сумма платежей равна $3x = \frac{3 \cdot 34}{70}S = \left(\frac{102}{70}S\right)$ и она на 77,2 тыс. руб. больше суммы изначального кредита (S тыс. руб.) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{102}{70}S = S + 77,2 \Rightarrow \frac{32}{70}S = 77,2 \Rightarrow \frac{222,7}{32} = \frac{386,7}{16} = \frac{193,7}{8} =$$

$$= \frac{1351}{8} = 168,875 \text{ тыс.} \Rightarrow \text{сумма кредита равна } 168,875 \text{ тыс. руб.} = 168\,875 \text{ руб.}$$

Ответ: 168875 руб.

Комментарий.

Неверно построена математическая модель. Ошибка допущена до записи уравнения, связывающего сумму платежей и сумму кредита, при сокращении дроби $\frac{43,2}{91}$.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 16.3.1

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

Ответ: 500 тыс. рублей.

Все вычисления в тыс. рублей; x — величина уменьш. долга с 2026 по 2030; y — величина уменьш. долга с 2031 по 2035.
 $B = 1300 - 5x$

	нач. долг	нач. %	платеж	кон. долг
1	1300	$0,2 \cdot 1300 = 260$	$260 + x$	$1300 - x$
2	$1300 - x$	$0,2(1300 - x) = 260 - 0,2x$	$260 + 0,8x$	$1300 - 2x$
3	$1300 - 2x$	$0,2(1300 - 2x) = 260 - 0,4x$	$260 + 0,6x$	$1300 - 3x$
4	$1300 - 3x$	$0,2(1300 - 3x) = 260 - 0,6x$	$260 + 0,4x$	$1300 - 4x$
5	$1300 - 4x$	$0,2(1300 - 4x) = 260 - 0,8x$	$260 + 0,2x$	$1300 - 5x$
6	B	$0,2B$	$0,2B + y$	$B - y$
7	$B - y$	$0,2(B - y) = 0,2B - 0,2y$	$0,2B + 0,8y$	$B - 2y$
8	$B - 2y$	$0,2(B - 2y) = 0,2B - 0,4y$	$0,2B + 0,6y$	$B - 3y$
9	$B - 3y$	$0,2(B - 3y) = 0,2B - 0,6y$	$0,2B + 0,4y$	$B - 4y$
10	$B - 4y$	$0,2(B - 4y) = 0,2B - 0,8y$	$0,2B + 0,2y$	$B - 5y$

$$\begin{aligned} \text{Сумма всех платежей: } 260 \cdot 5 + 3x + 5 \cdot 0,2B + 3y &= 1300 + 3x + B + 3y \\ &= 1300 + 3x + 1300 - 5x + 3y = 2600 - 2x + 3y = 2580 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2600 - 2x + 3y = 2580 \\ B - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 20 \\ 1300 - 5x - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 20 \\ 5(x + y) = 1300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 20 \\ x + y = 260 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 2x - 3(260 - x) &= 20 \\ 2x - 780 + 3x &= 20 \\ 5x &= 800 \Rightarrow x = 160 \end{aligned}$$

Долг в июле 2030: $1300 - 5x = 1300 - 5 \cdot 160 = 500$

Ответ: 500 000 рублей

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.3.2

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

Ответ: 500 тыс. рублей.

$S_0 = 1300$ тыс. рублей - первоначальная сумма кредита
 $r = 20\%$ - процент по кредиту $k = (1 + \frac{r}{100})$
 $S_k = 2580$ тыс. руб - сумма всех платежей
 S_{k_1} - сумма платежей за 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годы
 S_{k_2} - сумма платежей за 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годы
 A - величина, на которую уменьшается долг в 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годах
 B - величина, на которую уменьшается долг в 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годах
 $x_1, x_2, x_3, \dots$ - выплаты

год	январь	июль	0... выплаты
2025	-	S_0	-
2026	kS_0	$kS_0 - x_1 = S_1 = S_0 - A \Rightarrow x_1 = (k-1)S_0 + A$	
2027	kS_1	$kS_1 - x_2 = S_2 = S_0 - 2A \Rightarrow x_2 = (k-1)S_0 + (2-k)A$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
2030	kS_4	$kS_4 - x_5 = S_5 = S_0 - 5A \Rightarrow x_5 = (k-1)S_0 + (5-4k)A$	
2031	kS_5	$kS_5 - x_6 = S_6 = S_0 - 5A - B \Rightarrow x_6 = (k-1)S_0 + (5-5k)A + B$	
2032	kS_6	$kS_6 - x_7 = S_7 = S_0 - 5A - 2B \Rightarrow x_7 = (k-1)S_0 + (5-5k)A + (2-k)B$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
2035	kS_9	$kS_9 - x_{10} = S_{10} = S_0 - 5A - 5B \Rightarrow x_{10} = (k-1)S_0 + (5-5k)A + (5-4k)B$	

$$S_0 = 5A + 5B \quad k = 1 + \frac{F}{100}$$

$$B = \frac{S_0 - 5A}{5} \quad k = 1 + \frac{20}{100}$$

$$S_x = S_{x1} + S_{x2} \quad k = 1,2$$

$$S_{x1} = \frac{x_1 + x_5}{2} \cdot 5$$

$$S_{x1} = \frac{(k-1)S_0 + A + (k-1)S_0 + (5-4k)A}{2} \cdot 5$$

$$S_{x1} = \frac{2(k-1)S_0 + (6-4k)A}{2} \cdot 5$$

$$S_{x1} = 5(k-1)S_0 + \frac{5}{2}(6-4k)A$$

$$S_{x2} = \frac{x_6 + x_{10}}{2} \cdot 5$$

$$S_{x2} = \frac{(k-1)S_0 + (5-5k)A + B + (k-1)S_0 + (5-5k)A + (5-4k)B}{2} \cdot 5$$

$$S_{x2} = \frac{2(k-1)S_0 + 2(5-5k)A + (6-4k)B}{2} \cdot 5$$

$$S_{x2} = 5(k-1)S_0 + 5(5-5k)A + \frac{5}{2}(6-4k)B$$

$$S_x = 5(k-1)S_0 + \frac{5}{2}(6-4k)A + 5(k-1)S_0 + 5(5-5k)A + \frac{5}{2}(6-4k)B$$

$$S_x = 10(k-1)S_0 + (15-10k)A + (25-25k)A + (15-10k)B$$

$$S_x = 10(k-1)S_0 + (40-35k)A + (15-10k)B$$

$$S_x = 10(k-1)S_0 + (40-35k)A + (15-10k)\left(\frac{S_0 - 5A}{5}\right)$$

$$2580 = 10(1,2-1)1300 + (40-35 \cdot 1,2)A + (15-10 \cdot 1,2)\left(\frac{1300}{5} - A\right)$$

$$2580 = 2600 - 2A + 780 - 3A$$

$$5A = 800$$

$$A = \frac{800}{5}$$

$$A = 160 \text{ тыс. рублей}$$

гипотеза В имеет 2030 шт S_5

$$S_5 = S_0 - 5A$$

$$S_5 = 1300 - 5 \cdot 160$$

$$S_5 = 1300 - 800$$

$$S_5 = 500 \text{ тыс. рублей}$$

$$\text{Ответ: } S_5 = 500 \text{ тыс. рублей}$$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.3.3

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

Ответ: 500 тыс. рублей.

№ 16.

$S = 1300$ тыс. руб. — сумма кредита
 $r = 20\%$ — процентная ставка
 $b = 1 + 0.01r = 1.2$ — коэффициент

Сумма всех платежей = 2580 тыс. руб.

x — часть, на которую уменьшается долг в 2026–2030 г.
 y — часть, на которую уменьшается долг в 2031–2035 г.

год	Долг с %	Выплаты	Долг после выплат
2025			S
2026	Sb	$Sb - S + x$	$S - x$
2027	$Sb - xb$	$Sb - xb - S + 2x$	$S - 2x$
2028	$Sb - 2xb$	$Sb - 2xb - S + 3x$	$S - 3x$
2029	$Sb - 3xb$	$Sb - 3xb - S + 4x$	$S - 4x$
2030	$Sb - 4xb$	$Sb - 4xb - S + 5x$	$S - 5x$
2031	$Sb - 5xb$	$Sb - 5xb - S + 5x + y$	$S - 5x - y$
2032	$Sb - 5xb - yb$	$Sb - 5xb - yb - S + 5x + 2y$	$S - 5x - 2y$
2033	$Sb - 5xb - 2yb$	$Sb - 5xb - 2yb - S + 5x + 3y$	$S - 5x - 3y$
2034	$Sb - 5xb - 3yb$	$Sb - 5xb - 3yb - S + 5x + 4y$	$S - 5x - 4y$
2035	$Sb - 5xb - 4yb$	$Sb - 5xb - 4yb$	$0 = S - 5x - 5y$

Суммарные выплаты: $10Sb + 35xb - 10yb - 9S + 35X + 10Y = 2580$

$$\begin{cases} 10 \cdot 1300 \cdot 1,2 - 35 \cdot 1,2 \cdot X - 10 \cdot 1,2 \cdot Y - 9 \cdot 1300 + 35X + 10Y = 2580 & (1) \text{ тыс. руб.} \\ 1300 - 5X - 5Y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) Y = 260 - X$$

$$\begin{aligned} 2) 15600 - 42X - 12Y - 11700 + 35X + 10Y &= 2580 \\ 3900 - 7X - 2Y &= 2580 \end{aligned}$$

$$7X + 2Y = 1310$$

$$7X = 1310 - 2Y$$

$$X = \frac{1310 - 2Y}{7}$$

$$7X = 1310 - 2(260 - X)$$

$$5X = 790$$

$$X = 158 \text{ — тыс. руб.}$$

Долг в июле 2030 составит:

$$S - 5X = 1300 - 5 \cdot 158 = 510 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 510 тыс. руб.

Комментарий.

Математическая модель построена верно. Ошибка допущена при решении уравнения: вместо уравнения $7x + 2y = 1310$ должно быть уравнение $7x + 2y = 1320$.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 16.3.4

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

Ответ: 500 тыс. рублей.

Пусть x - ~~каждый~~ ^{долг} ~~мелкий~~ ^{мелкий} ~~за~~ ^{за} 26, 27, 28, 29, 30 года
 m - ~~платеж~~ ^{долг} ~~за~~ ^{за} 31, 32, 33, 34 и 35 года

Дата	Сумма долга	
и 25	1300	
д 26	$1300 \cdot 1,2$	д 35 $(1300 - 5x - 4m) \cdot 1,2$
и 26	долг вплата $\Rightarrow 1300 \cdot 1,2 - 1300 + x$ $1300 - x$	и 35 $(1300 - 5x - 4m) \cdot 1,2$
д 27	$(1300 - x) \cdot 1,2$	и 35 0
и 27	$(1300 - x) \cdot 1,2 - 1300 + 2x$ $1300 - 2x$	Вплата за все года ^{все года} 26, 27, 28, 29, 30 уменьшающая все года ^{все года} воспользуемся формулой ариф прогрессии
д 28	$(1300 - 2x) \cdot 1,2$	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
и 28	$(1300 - 2x) \cdot 1,2 - 1300 + 3x$ $1300 - 3x$	Для периода с 26 - 30 г.
д 29	$(1300 - 3x) \cdot 1,2$	$\frac{1300 \cdot 1,2 - 1300 + x + (1300 - 4x) \cdot 1,2 - 1300 + 5x}{2} \cdot 5$
и 29	$(1300 - 3x) \cdot 1,2 - 1300 + 4x$ $1300 - 4x$	Для периода с 31 по 35.
д 30	$(1300 - 4x) \cdot 1,2$	$\frac{(1300 - 5x) \cdot 1,2 - 1300 + 5x + m}{2} + \frac{(1300 - 5x - 4m) \cdot 1,2}{2} \cdot 5$
и 30	$(1300 - 4x) \cdot 1,2 - 1300 + 5x$ $1300 - 5x$	
д 31	$(1300 - 5x) \cdot 1,2$	
и 31	$(1300 - 5x) \cdot 1,2 - 1300 + 5x + m$ $1300 - 5x - m$	
д 32	$(1300 - 5x - m) \cdot 1,2$	
и 32	$(1300 - 5x - m) \cdot 1,2 - 1300 + 5x + 2m$ $1300 - 5x - 2m$	
д 33	$(1300 - 5x - 2m) \cdot 1,2$	
и 33	$(1300 - 5x - 2m) \cdot 1,2 - 1300 + 5x + 3m$ $1300 - 5x - 3m$	Тогда $\Rightarrow$ воспользуемся формулой и сложим
д 34	$(1300 - 5x - 3m) \cdot 1,2$	
и 34	$(1300 - 5x - 3m) \cdot 1,2 - 1300 + 5x + 4m$ $1300 - 5x - 4m$	

$$\frac{1300 \cdot 1,2 - 1300 + x + (1300 - 4x) \cdot 1,2 - 1300 + 5x}{2} \cdot 5 + \frac{(1300 - 5x) \cdot 1,2 - 1300 + 5x + m +}{2} + \frac{(1300 - 5x - 4m) \cdot 1,2}{2} \cdot 5 = 2580 \text{ кг.}$$

Комментарий.

Математическая модель не построена. Не получено ещё уравнение.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 16.4.1

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

Ответ: 200 тыс. рублей.

№16 Начальный долг - 800 тыс.
Каждый год долг возр в 1,2 раза от текущего долга
Пусть платежи в 2027 и 2028 годах составили x тыс. р.
а в 2029 - y тыс. рублей. Тогда согласно условию за-
дачи: $x + x + y = 1254,4 \Rightarrow y = 1254,4 - 2x$
Далее рассмотрим таблицу долга и выплат:

	долг	выплата	остаток
2027	$1,2 \cdot 800 = 960$	x	$960 - x$
2028	$1,2(960 - x)$	x	$1,2(960 - x) - x$
2029	$1,2(1,2(960 - x) - x)$	y	0

Тогда, согласно данной таблице, долг и выплата в последний год равны, тогда

$$1,2(1,2(960 - x) - x) - y = 0, \text{ т.к. } y = 1254,4 - 2x, \text{ то}$$
$$1,2(1152 - 2,2x) - 1254,4 + 2x = 0$$
$$1382,4 - 2,64x - 1254,4 + 2x = 0$$
$$0,64x = 128$$
$$x = 200, \text{ значит платежи в 2027 и 2028 годах}$$

составит 200 тыс. р., что и требовалось найти

Ответ: 200 тыс. р.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.4.2

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

Ответ: 200 тыс. рублей.

N16

Получим ~~каждый~~ ^{берут} в июле 2026 г., то в 2026 году никаких платежей не делаем и долг на конец 2026 г. равен 800 тыс. руб.

Тогда в январе ²⁰²⁷ долг возрастёт на 20%, т.е. в $(1 + \frac{20}{100}) = 1,2$ раз, т.е. долг будет равен $800 \cdot 1,2 = 960$ тыс. руб.

С февраля по июнь вносился некоторый платеж, пусть он равен X тыс. Тогда в декабре 2027 г. долг равен $960 - X$ (тыс. руб.)

Тогда в январе 2028 г. долг возр. в 1,2 раза: $(960 - X) \cdot 1,2 = 1152 - 1,2X$ (тыс. руб.)

С февр. по июнь 2028 г. вносился платеж, равный платежу в 2027 г., т.е. X (тыс. руб.). Тогда в декабре 2028 г. долг составил $1152 - 1,2X - X = 1152 - 2,2X$ (тыс. руб.).

Тогда в январе 2029 г. долг возраст. в 1,2 раза: $(1152 - 2,2X) \cdot 1,2 = 1382,4 - 2,64X$ (тыс. руб.)

с февр. по июнь 2029 г. ~~автом~~ вносится платеж, и т.к.

кредит и долг погашаются полностью, то платеж равен
составл. ~~сумма~~ долга, т.е. $1382,4 - 2,64x$ (тыс. руб.).

Известно, что сумма всех платежей равна 1254,4 тыс. руб.
т.е.

$$x + x + 1382,4 - 2,64x = 1254,4$$

$$0,64x = 128$$

$$x = \frac{128}{0,64} = \frac{128 \cdot 100}{64} = 200 \quad (\text{тыс. руб.})$$

т.е. платеж 2027 г. составил. 200 тыс. руб. ≈ 200.000 руб.

Ответ: 200 тыс. руб. (или же 200.000 руб.)

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.4.3

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

Ответ: 200 тыс. рублей.

Пусть $S = 800$ тыс. руб. - сумма кредита, процент $p = 20$,
платежи 2027 и 2028 г. по x тыс. руб. каждый, y - платеж 2029 г.
Каждый январь долг возрастает в $1 + \frac{p}{100} = 1,2$ раза
Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} ((S \cdot 1,2 - x) \cdot 1,2 - x) \cdot 1,2 - y = 0 \\ 2x + y = 1254,4 \end{cases}$$
$$1,728S - 2,64x - y = 0$$
$$y = 1,728S - 2,64x$$
$$2x + 1,728S - 2,64x = 1254,4$$
$$0,64x = 1,728S - 1254,4$$
$$0,64x = 128$$
$$64x = 12800$$
$$x = 100$$

Ответ: 100 тыс. руб.

Комментарий.

Верно построена математическая модель. Линейное уравнение решено неверно.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 16.4.4

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

Ответ: 200 тыс. рублей.

Пусть март - месяц платежа
 Пусть x - выплата в 2027 г. ~~и в 2028 г.~~ = выплата в 2028 г.
 Тогда y - выплата в 2029 г.

Дата	Долг
июль 2026	800
январь } март } 2027 июль }	$0,2 \cdot 800 = 160$ $\Rightarrow$ была выплата = x $160 - x$
январь } март } 2028 июль }	$0,2(160 - x) = 32 - 0,2x$ $\Rightarrow$ была выпл. = x $32 - 0,2x - x = 32 - 1,2x$
январь } март } 2029 июль }	$0,2(32 - 1,2x) = 6,4 - 0,24x$ $\Rightarrow$ была выпл. = y $6,4 - 0,24x - y$

$$\begin{cases} 6,4 - 0,24x - y = 0 \\ 2x + y = 1254,4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1254,4 - 2x \\ 6,4 - 0,24x - 1254,4 + 2x = 0 \end{cases}$$

$$1,76x - 1248 = 0$$

$$x = \frac{1248}{1,76}$$

$$x = \frac{7800}{11} \approx 709 \text{ тыс. р.}$$

Ответ: 709 тыс. р.

Комментарий.

Неверно построена математическая модель.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 16.5.1

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

Ответ: 5.

Всего было 6 выплат: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 \geq 1,2$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = S$$

r	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	S
7	0,12	0,163	0,156	0,149	0,142	0,135	1,315
5	0,15	0,145	0,14	0,135	0,13	0,125	1,225
4	0,14	0,126	0,132	0,128	0,124	0,12	1,18

Наименьшим числом, при котором $S > 1,2$ является 5. При $r=4$, $S < 1,2$.

Ответ: 5

$P_1 = (1 + \frac{r}{100}) - 0,9$
 $P_2 = 0,9(1 + \frac{r}{100}) - 0,6$
 $P_3 = 0,6(1 + \frac{r}{100}) - 0,4$
 $P_4 = 0,4(1 + \frac{r}{100}) - 0,3$
 $P_5 = 0,3(1 + \frac{r}{100}) - 0,2$
 $P_6 = 0,2(1 + \frac{r}{100})$

Комментарий.

Математическая модель построена верно. Усложняет проверку отсутствие вычислений. В таблице все результаты вычислений по формулам, записанным справа, верные. Логика решения верна.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.5.2

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, причём r – **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

Ответ: 5.

Решение:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 > 1,2 \text{ млн, где } x - \text{выплата}$$

$N = 1$ – сумма кредита

$r_{\min} = ?$, где $r - \%$ $r \in \mathbb{Z}$

$$x_1 = N + \frac{rN}{100} - 0,9 ; x_2 = 0,9 + \frac{r \cdot 0,9}{100} - 0,8 ; x_3 = 0,8 + \frac{r \cdot 0,8}{100} - 0,7 ;$$

$$x_4 = 0,7 + \frac{r \cdot 0,7}{100} - 0,6 ; x_5 = 0,6 + \frac{r \cdot 0,6}{100} - 0,5 ; x_6 = 0,5 + \frac{r \cdot 0,5}{100}$$

$$1 + \frac{r}{100} - 0,9 + 0,9 + \frac{r \cdot 0,9}{100} - 0,8 + 0,8 + \frac{r \cdot 0,8}{100} - 0,7 + 0,7 + \frac{r \cdot 0,7}{100} - 0,6 + 0,6 +$$

$$+ \frac{r \cdot 0,6}{100} - 0,5 + 0,5 + \frac{r \cdot 0,5}{100} > 1,2$$

$$1 + \frac{3,5r}{100} > 1,2 \quad r > \frac{20}{3,5} \quad \text{Ответ: } r = 5\%$$

$$\frac{3,5r}{100} > 0,2 \quad r_{\min} = 5\%$$

Комментарий.

Математическая модель построена верно. Допущены ошибки: $1 + \frac{4,5r}{100} > 1,2$, а не

$$1 + \frac{3,5r}{100} > 1,2 ; \frac{20}{3,5} > 5,7, \text{ т.е. должно быть } r = 6.$$

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 16.5.3

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг(в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

Ответ: 5.

месяц	сумма долга 1-го числа (млн р)	сумма долга 15-го числа	сумма выплат
1		1 млн	
2	$1 + 1 \cdot r$	0,9	$1 + 1r - 0,9$
3	$0,9 + 0,9 \cdot r$	0,8	$0,9 + 0,9r - 0,8$
4	$0,8 + 0,8 \cdot r$	0,7	$0,8 + 0,8r - 0,7$
5	$0,7 + 0,7 \cdot r$	0,6	$0,7 + 0,7r - 0,6$
6	$0,6 + 0,6 \cdot r$	0,5	$0,6 + 0,6r - 0,5$
7	$0,5 + 0,5 \cdot r$	0	$0,5 + 0,5r$

тогда общая сумма выплат:

$$1 + 1r - 0,9 + 0,9 + 0,9r - 0,8 + 0,8 + 0,8r - 0,7 + 0,7 + 0,7r - 0,6 + 0,6 + 0,6r - 0,5 + 0,5 + 0,5r = 1 + 4,5r$$

общая сумма выплат должна быть больше 1,2 млн $\Rightarrow$

$$1 + 4,5r > 1,2$$

$$4,5r > 0,2$$

$$r > 2,25$$

так r – целое число, то
наименьшее $r = 3$.

Ответ: r наименьшее = 3

Комментарий.

Математическая модель построена неверно. Если подставить в таблицу число 3 вместо r , то сумма долга уже на 1-е число второго месяца должна составить 4 млн руб. Кроме того, ещё и неравенство решено неверно.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 16.6.1

15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

Ответ: 1.

S - сумма, которую взяли в кредит
 x - сумма, на которую каждый раз уменьшается долг.

$\frac{r\%}{100} = n$, где $r\%$ - на $r\%$ - увеличивается долг.

банк	выплат
1. $S + Sn$	$Sn + x$
2. $S - x + (S - x)n$	$(S - x)n + x$
$\vdots$	
39. $S - 38x + (S - 38x)n$	$(S - 38x)n + x \Rightarrow S - 38x + (S - 38x)n = (S - 38x)n + x \Rightarrow$
40. 0	$\Rightarrow S = 39x$

Z - сумма выплат

По условию: $Z - S = 0,2 \cdot S$

$$\begin{aligned}
 Z &= Sn + x + (S - x)n + x + \dots + (S - 38x)n + x = 39x + n(39S - (x + 2x + \dots + 38x)) \\
 &= 39x + n(39S - x(\frac{1+38}{2} \cdot 38)) = 39x + n \cdot 39S - nx \cdot 39 \cdot 19 = 39x + n \cdot 39 \cdot 39x - n \cdot 39 \cdot 19x = 39x + 39 \cdot 20nx \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 39x + 39 \cdot 20nx - 39x = 0,2 \cdot 39x \Rightarrow 39 \cdot 20nx = 0,2 \cdot 39x \Rightarrow \\
 &\Rightarrow n = \frac{0,2}{20} = \frac{1}{100}; \quad Z = n \cdot 100 \Rightarrow r = 1\%
 \end{aligned}$$

Ответ: 1%.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 16.6.2

15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

Ответ: 1.

Всего 39 месяцев. Пусть сумма, взятая в кредит – S . Пусть $k = \frac{r}{100}$ – коэффициент начисления процентов. Тогда, Выплати каждый месяц одну часть; из части долга $\frac{S}{39}$ + проценты за месяц. Проценты за месяц, вычисляются по формуле:

$$1 \text{ мес.} \quad 2 \text{ м.} \quad 3 \text{ м.} \quad \dots \quad 39 \text{ м.}$$

$$S \cdot k \quad + \quad \frac{38S \cdot k}{39} \quad + \quad \frac{37S \cdot k}{39} \quad \dots \quad \frac{S \cdot k}{39}$$

Применим формулу арифметической прогрессии

$$N = \left(\frac{x_1 + x_n}{2} \right) \cdot n$$

$$\text{Проценты} = \left(\frac{S \cdot k + \frac{S \cdot k}{39}}{2} \right) \cdot 39 = \frac{39S \cdot k + S \cdot k}{2} = \frac{40S \cdot k}{2} = 20S \cdot k.$$

Часть долга:

$$1 \text{ м.} \quad 2 \text{ м.} \quad \dots \quad 39 \text{ м.}$$

$$\frac{S}{39} + \frac{S}{39} + \dots + \frac{S}{39} = S.$$

Общие выплаты:

$$S + 20 \cdot S \cdot k = 1,2 \cdot S$$

$$20k = 0,2.$$

$$k = 0,01$$

$$k = \frac{r}{100}$$

$$0,01 \cdot 100 = r \Rightarrow r = 1\%$$

Ответ: ~~1%~~ 1%

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

5. Критерии проверки и оценка решений задания 17

Задание № 17 — это планиметрическая задача. В пункте *а* нужно **доказать** геометрический факт, в пункте *б* – найти (вычислить) геометрическую величину.

Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не степень следования «эталонному» решению.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в действующих школьных учебниках.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>а</i> , при этом пункт <i>а</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задача 17 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2026 г.)

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали BE , если $AD = 6$.

Решение.

а) В четырёхугольнике $ABCD$ острые углы ACB и CAD опираются на равные хорды AB и CD . Следовательно, $\angle ACB = \angle CAD$, а значит, прямые BC и AD параллельны. Аналогично прямые CD и BE параллельны.

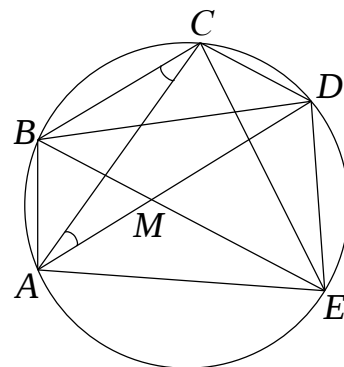
Значит, четырёхугольники $ABCD$ и $BCDE$ являются равнобедренными трапециями. Следовательно, $AC = BD = CE$.

б) Обозначим точку пересечения диагоналей AD и BE через M . Четырёхугольник $BCDM$ является параллелограммом, поскольку его противоположные стороны параллельны. Значит: $BM = CD = AB = 3$, $DM = BC = DE = 4$. Следовательно, треугольники ABM и MDE равнобедренные, причём $\angle BAM = \angle AMB = \angle DME = \angle DEM$.

Значит, эти треугольники подобны с коэффициентом подобия $\frac{DE}{AB} = \frac{4}{3}$, откуда получаем:

$$ME = \frac{DE}{AB} \cdot AM = \frac{DE}{AB} \cdot (AD - DM) = \frac{8}{3};$$

$$BE = BM + ME = \frac{17}{3}.$$



Ответ: б) $\frac{17}{3}$.

ИЛИ

В параллелограмме $ABCD$ с острым углом BAD из вершины B проведены высоты BP и BQ , причём точка P лежит на стороне AD , а точка Q — на стороне CD . На стороне AD отмечена точка M . Известно, что $AM = BP$, $AB = BQ$.

а) Докажите, что $BM = PQ$.

б) Найдите площадь треугольника APQ , если $AM = BP = 8$, $AB = BQ = 10$.

Решение.

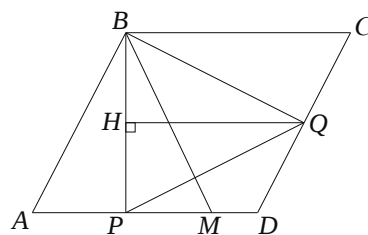
а) Заметим, что:

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAD, \quad \angle ABP = 90^\circ - \angle BAD, \quad \angle CBQ = 90^\circ - \angle BCD = 90^\circ - \angle BAD.$$

Таким образом,

$$\angle PBQ = \angle ABC - \angle ABP - \angle CBQ = \angle BAD.$$

Значит, треугольники MAB и PBQ равны, поскольку $AM = BP$, $AB = BQ$ и $\angle MAB = \angle PBQ$. Следовательно, $BM = PQ$.



б) В треугольнике ABP , по теореме Пифагора, получаем: $AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = 6$.
 Пусть QH — высота треугольника BQP . Тогда треугольники ABP и BQH равны, поскольку $AB = BQ$, $\angle BAP = \angle QBH$ и $\angle APB = \angle BHQ = 90^\circ$. Следовательно, $BH = AP = 6$. Значит, $PH = BP - BH = 2$.
 Площади треугольников APQ и APH равны, поскольку прямые AP и QH параллельны. Площадь треугольника APH равна

$$\frac{AP \cdot PH}{2} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6.$$

Следовательно, площадь треугольника APQ равна 6.

Ответ: б) 6.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 17.1

В четырёхугольнике $KLMN$ вписана окружность с центром O . Эта окружность касается стороны MN в точке A . Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.

а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO .

б) Найдите длину стороны MN , если $LA = 1$.

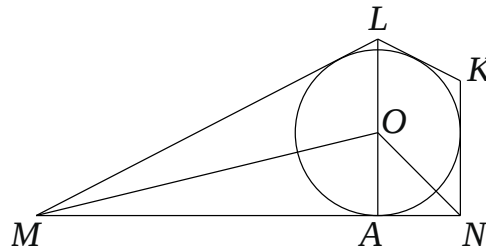
Решение.

а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла. Следовательно, LO — биссектриса угла KLM , а значит,

$$\angle KLO = \frac{\angle KLM}{2} = 60^\circ.$$

Прямые LO и KN параллельны, поскольку $\angle NKL + \angle KLO = 180^\circ$. Следовательно, прямая LO перпендикулярна прямой MN , так как $\angle MNK = 90^\circ$.

Отрезок OA перпендикулярен прямой MN как радиус окружности, касающейся этой прямой. Через точку O проходит единственная прямая, перпендикулярная прямой MN . Значит, точки L , O и A лежат на одной прямой, то есть точка A лежит на прямой LO .



б) В прямоугольном треугольнике LAM угол MLA равен 60° . Значит:

$$MA = LA \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}, \quad ML = 2LA = 2,$$

откуда, учитывая, что MO — биссектриса угла LMA , получаем:

$$OA = \frac{MA}{MA + ML} \cdot LA = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} = 2\sqrt{3} - 3.$$

В прямоугольном треугольнике NAO угол ANO равен 45° , поскольку NO — биссектриса угла KNA . Значит, $AN = OA = 2\sqrt{3} - 3$. Следовательно,

$$MN = MA + AN = 3\sqrt{3} - 3.$$

Ответ: б) $3\sqrt{3} - 3$.

Задание 17.2

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали BE , если $AD = 6$.

Решение.

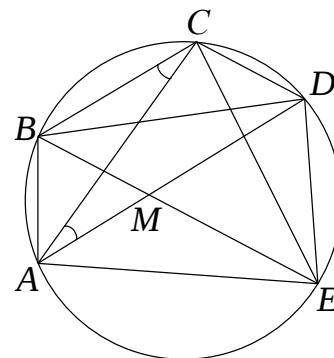
а) В четырёхугольнике $ABCD$ острые углы ACB и CAD опираются на равные хорды AB и CD . Следовательно, $\angle ACB = \angle CAD$, а значит, прямые BC и AD параллельны. Аналогично прямые CD и BE параллельны.

Значит, четырёхугольники $ABCD$ и $BCDE$ являются равнобедренными трапециями. Следовательно, $AC = BD = CE$.

б) Обозначим точку пересечения диагоналей AD и BE через M . Четырёхугольник $BCDM$ является параллелограммом, поскольку его противоположные стороны параллельны. Значит: $BM = CD = AB = 3$, $DM = BC = DE = 4$. Следовательно, треугольники ABM и MDE равнобедренные, причём $\angle BAM = \angle AMB = \angle DME = \angle DEM$. Значит, эти треугольники подобны с коэффициентом подобия $\frac{DE}{AB} = \frac{4}{3}$, откуда получаем:

$$ME = \frac{DE}{AB} \cdot AM = \frac{DE}{AB} \cdot (AD - DM) = \frac{8}{3};$$

$$BE = BM + ME = \frac{17}{3}.$$



Ответ: б) $\frac{17}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 17.3

Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Через точку O провели прямую, параллельную основаниям BC и AD .

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM : MB = 1 : 2$.

Решение.

а) Прямые MO и AD параллельны, значит, $\angle MOA = \angle OAD$ (рис. 1). Следовательно, треугольник AMO равнобедренный и $AM = MO$. Аналогично $CN = NO$.

Поскольку $MB = CN$, получаем:

$$AB = AM + CN = MO + ON = MN.$$

б) Пусть $\angle OAD = \angle OAM = \alpha$. Тогда

$$\angle CNO = \angle CDA = \angle BAD = 2\alpha.$$

Пусть $MO = AM = a$. Тогда

$$MB = CN = ON = 2a.$$

По теореме косинусов для треугольников AMO и CNO имеем:

$$AO^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha),$$

$$OC^2 = 4a^2 + 4a^2 - 8a^2 \cdot \cos 2\alpha,$$

откуда получаем:

$$2a^2 + 2a^2 \cdot \cos 2\alpha = 8a^2 - 8a^2 \cdot \cos 2\alpha; \cos 2\alpha = \frac{3}{5}.$$

Проведём высоты M_1M_2 и N_1N_2 через точки M и N соответственно (рис. 2) и найдём длины оснований трапеции:

$$AD = AM_2 + M_2N_2 + N_2D =$$

$$= MN + 2AM \cdot \cos 2\alpha =$$

$$= 3a + \frac{6}{5}a = \frac{21}{5}a,$$

$$BC = M_1N_1 - M_1B - CN_1 = MN - 2BM \cdot \cos 2\alpha =$$

$$= 3a - \frac{12}{5}a = \frac{3}{5}a.$$

Таким образом, $BC : AD = 1 : 7$.

Ответ: б) 1:7.

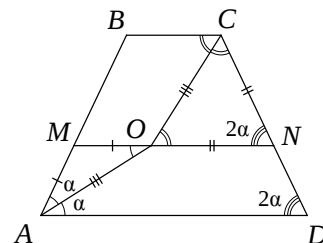


Рис. 1

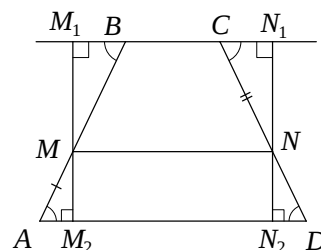


Рис. 2

Задание 17.4

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

- а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.
 б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

Решение.

а) Поскольку

$$\angle ABC = \angle AHC = \angle ECD = \angle EAD = 90^\circ,$$

около четырёхугольников $ABCH$ и $AECD$ можно описать окружности (рис. 1).

Значит,

$$\angle ABH = \angle ACH = \angle ACD = \angle AED,$$

то есть прямые BH и ED параллельны.

б) Опустим из точки B перпендикуляр BK на прямую CD (рис. 2). Стороны KH и CD треугольников BKH и ECD лежат на одной прямой, а стороны BK и EC , BH и ED попарно параллельны. Значит, треугольники BKH и ECD подобны.

Поскольку

$$\begin{aligned} BK &= BC \cdot \sin \angle BCK = EC \cdot \cos \angle ECB \cdot \sin \angle BCK = \\ &= EC \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{4} EC, \end{aligned}$$

коэффициент подобия равен $\frac{3}{4}$. Значит,

$$BH : ED = 3 : 4.$$

Ответ: б) 3:4.

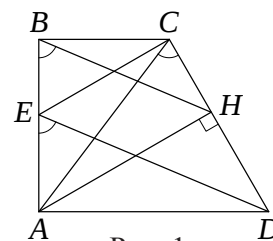


Рис. 1

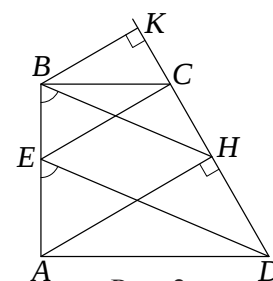


Рис. 2

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 17.5

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH . Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

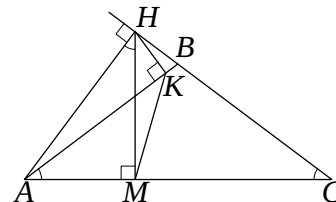
б) Найдите MK , если $AB = 5$, $AC = 8$.

Решение.

а) Поскольку $\angle AMH = \angle AKN = 90^\circ$, около четырёхугольника $AMKH$ можно описать окружность с диаметром AH .
Получаем:

$$\angle BAC = \angle BCA = 90^\circ - \angle HAC = \angle AHM,$$

поэтому $AM = MK$ как хорды, стягивающие равные дуги.



б) В прямоугольных треугольниках AHM и ACH имеем:

$$AM = AH \cdot \cos \angle HAM = AC \cdot \cos^2 \angle HAM = AC \cdot (1 - \cos^2 \angle ACB).$$

Поскольку $\cos \angle ACB = \frac{AC}{2BC} = \frac{4}{5}$, получаем:

$$MK = AM = \frac{72}{25}.$$

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 17.6

В остроугольном треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC , вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K . Отрезок BK – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите NK , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 16, $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ACB = 85^\circ$.

Решение.

а) Поскольку BK – диаметр описанной около треугольника ABC окружности, получаем

$$\begin{aligned}\angle ABN &= 90^\circ - \angle ANB = 90^\circ - \angle ACB = \\ &= 90^\circ - \angle HCB = \angle CBH = \angle CBK.\end{aligned}$$

Следовательно, хорды AN и CK стягивают равные дуги, а значит, они равны.

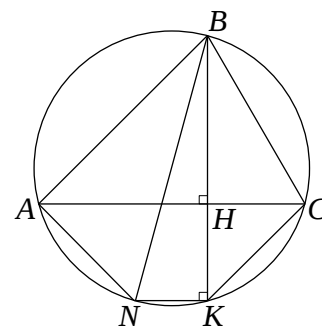
б) Пусть $R = 16$ – радиус окружности, описанной около треугольника ABC . Имеем:

$$\begin{aligned}\angle ABN &= \angle CBH = 90^\circ - \angle HCB = 5^\circ, \\ \angle ABC &= 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 55^\circ; \\ \angle KBN &= \angle ABC - \angle ABN - \angle CBK = 45^\circ.\end{aligned}$$

Следовательно, по теореме синусов

$$NK = 2R \cdot \sin \angle KBN = 2R \cdot \sin 45^\circ = 16\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $16\sqrt{2}$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Примеры оценивания решений задания 17

Пример 17.1.1

В четырёхугольнике $KLMN$ вписана окружность с центром O . Эта окружность касается стороны MN в точке A . Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.

а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO .

б) Найдите длину стороны MN , если $LA=1$.

Ответ: б) $3\sqrt{3}-3$.

Дано:
 $KLMN$ - о-мн.
 O - центр
 $A \in MN$
 A - т. касания
 $\angle MNK = 90^\circ$
 $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$
 а) Д-ть:
 $A \in LO$
 б) $MN = ?$
 $LA = 1$

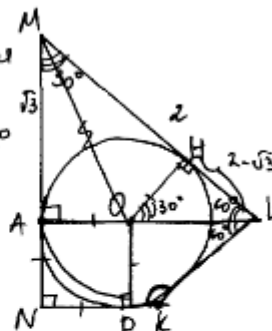
Решение:

а) 1) центр - впис. окружн.
 имеет в т. пересечения
 бис-с $\Rightarrow$
 LO - бис-с $\angle MLK$
 $\Rightarrow \angle MLO = \angle LK = \frac{1}{2} \angle MLK = 60^\circ$
 $\angle LKN = 120^\circ$ (по ус.)

Т.о. $\angle LK + \angle LKN = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$

- одностор.

угол



$\Rightarrow LO \parallel KN$

т.к. $\angle KLM = 90^\circ \Rightarrow LO \perp MN$

т.к. A - точка кас.; $A \in MN \Rightarrow$

радиус, перп. к хорд. в точке кас.

$\Rightarrow OA \parallel KM \Rightarrow A \in LO$

$O \in LO$
 $LO \parallel KN$

чтб

б) $MN = ?$; $LA = 1$

1) Рассм. $\triangle MAL$ - пр.м. ут. ($\angle MAL = 90^\circ$)

$\angle MLA = 60^\circ \Rightarrow \angle AML = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow$

по св-ву: $ML = 2 \cdot AL = 2 \cdot 1 = 2$

кат. противометный угол 30°

2) По Т.Пиф.

в т. $\triangle AML$: $ML^2 = AM^2 + AL^2 \Rightarrow AM = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$

3) Проведем OP и OM - радиусы в т. касания ($P \in NK$, $H \in KL$)
 $OP \perp NK$; $OM \perp KL$

Рассм. $AMHO$: проведем MO . $\triangle MHO = \triangle MAO$ по катету и гипот. ($AO = OH = R$ - радиус)
 MO - бисс.

тогда $AM = MH = \sqrt{3} \Rightarrow HL = ML - MH = 2 - \sqrt{3}$

4) Рассм. $\triangle OHL$: пр.м. ут.; OL - гип.; $\angle HOL = 90^\circ - \angle MLO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\Rightarrow$ по св-ву: $OL = 2HL = 2 \cdot (2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3}$

тогда $R = OH = \sqrt{OL^2 - HL^2} = \sqrt{(4 - 2\sqrt{3})^2 - (2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 \cdot 3} = (2 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3 = OA$

5) Рассм. $NAOP$: $AO \perp NP$
 $AO \perp AN$

$\Rightarrow NAOP$ - квадрат $\Rightarrow NA = AO = R = 2\sqrt{3} - 3$

$AO = OP$

6) Т.о. $MN = MA + AN = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 = 3\sqrt{3} - 3$ Ответ: б) $3\sqrt{3} - 3$

Комментарий.

$$y = 4x \cdot \cos \alpha = 2x - \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = 2$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$4) \angle KBC = \angle KCB = \angle KMN = \angle KNM =$$

$$= \angle BCD = \angle CDA \Rightarrow$$

$$\triangle KPD \sim \triangle KMN \sim \triangle KBC$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{KB} = \frac{CD}{BK+3x}$$

$$\triangle KMN$$

$$\angle BKC = 4\alpha - 180^\circ$$

$$\frac{MN}{\sin(4\alpha - 180^\circ)} = \frac{3x}{-\sin 4\alpha} = \frac{BK + 2x}{\sin(90^\circ) - \sin(180^\circ - 2\alpha)}$$

$$BK + 2x = 3x \cdot \frac{\sin 2\alpha}{-\sin 4\alpha} = \frac{3x}{-2\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{3x}{-2 \cdot (1 - 2\sin^2 \alpha)} = \frac{3x}{2 \cdot \frac{40 - 25\sqrt{5}}{25 \cdot 5}} = \frac{5x}{2}$$

$$BK = 0,5x$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BK}{BK+3x} = \frac{0,5x}{3,5x} = \frac{1}{7}$$

$$\text{Ответ: } AD : BC = 7 : 1$$

Приведено верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б.

Оценка эксперта: 3 балла.

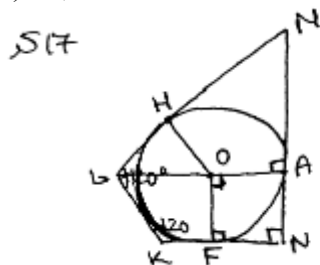
Пример 17.1.2

В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром O . Эта окружность касается стороны MN в точке A . Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.

а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO .

б) Найдите длину стороны MN , если $LA = 1$.

Ответ: б) $3\sqrt{3} - 3$.



Дано: $MNKL$ - впис. четырёхугол.

$$\angle MNK = 90^\circ \quad \angle LKN = \angle KLM = 120^\circ$$

а) До-ть (х) A лежит на LO

б) MN - ? если $LA = 1$

б) так $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle LKN = \angle KLM = 120^\circ \Rightarrow \angle LMN = 360 - 120 - 120 - 90 = 30^\circ \Rightarrow$ Рассмотрим $\triangle LAN$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle LNA = 30^\circ \\ LA = 1 \\ LA \perp AN \\ (\text{радиус } \perp \text{ кас.}) \end{array} \right\} \Rightarrow LN = 2LA = 2$$

$$\text{по т. П: } NA = \sqrt{LN^2 - LA^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

$$KL = NA \quad (\text{т.к. касательн от (с) к}) \Rightarrow KL = NA = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KN = LN - KL = 2 - \sqrt{3}$$

Рассм. $\triangle HOF$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle LHO = \angle OFL = 90^\circ \quad (\text{радиусы } \perp \text{ кас.}) \\ \angle HLF = 120^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle HOF = 360 - 120 - 90 - 90 = 60^\circ$$

Рассм. $\triangle KON$ и $\triangle LOF$:

$$\angle LFO = \angle LHO = 90^\circ$$

$$ON = OF - \text{радиусы}$$

$$LN = LF \quad (\text{из одной точки к кас.})$$

$$\Rightarrow \angle KON = \angle LOF \quad (\text{по 2-й экз. категор. углов})$$

$$\Rightarrow \angle LOF = \angle KON = \frac{1}{2} \angle HOF = 30^\circ \Rightarrow LO = 2NL = 4 - 2\sqrt{3} \quad (\text{т.к. } \angle KON = 30^\circ)$$

$$\Rightarrow OA = LA - LO = 1 - 4 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Рассм. $\triangle FNAO$:

$$\angle FNA = 90^\circ$$

$$\angle OFN = \angle OAN = 90^\circ \quad (\text{радиусы } \perp \text{ кас.}) \Rightarrow FNAO - \text{квадрат} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow NA = 2\sqrt{3} - 3 = OA \Rightarrow MN = MA + AN = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 = 3\sqrt{3} - 3$$

Ответ! б) $MN = 3\sqrt{3} - 3$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен

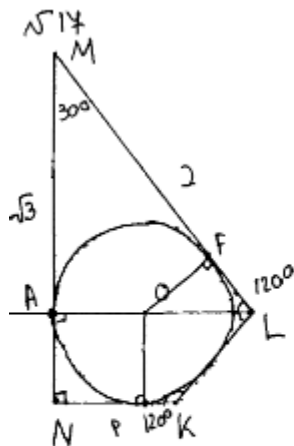
Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 17.1.3

В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром O . Эта окружность касается стороны MN в точке A . Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.

- а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO .
б) Найдите длину стороны MN , если $LA=1$.

Ответ: б) $3\sqrt{3}-3$.



а) Т.к. окружность с ц. О касается MN в т. А, то $\angle OAN = 90^\circ$,
 ML и LK - касательные к окружности, LO - секущая,
 тогда по св-ву касательной и секущей $\angle MLA = \angle LK$.
 $= \frac{1}{2} \angle MLK = 60^\circ$

Значит, что $\angle ANK + \angle NKL + \angle KLA + \angle LAN =$
 $= 90^\circ + 120^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 360^\circ$ ~~значит $\angle NKL$ — выпукл~~
 значит $ANKL$ — четырехугольник, AL — сторона четырехугольника,
 значит LA перпендикулярна прямой LO ч.т.д.

$$\therefore ML = \frac{AL}{\sin \angle AML} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \quad AM = ML \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

пролегал CF ; а F - точка касания ML окружности

MA = MF = 50 (как стороны квадрата в одной точке)

$$F_L = M_L - MF = 2 - \sqrt{3}$$

Рассчитать ΔCFL : ~~по формуле~~ $\Delta FL = 0.1 \cos 60^\circ$

$$\Rightarrow OL = \frac{FL}{\cos 60^\circ} = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$AO = AL - OL = 1 - 4 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3$$

Проведен ОП, где Р-Т. касая НК окружности, вписанной в NMK

$$\angle N \text{ ~~PO~~ } = 90^\circ, \text{ Рассмотрим } \triangle \text{ ~~CP~~ } N \quad \angle A N \text{ ~~D~~ } = \angle N \text{ ~~PO~~ } = \angle C A N =$$

$$= 90^\circ, \text{ тогда } \angle A O D = 90^\circ,$$

maka AOPN - ~~kecepatan~~ ^{kecepatan} ~~nya~~ ^{nya} $\frac{OA}{OP} = \frac{OA}{OA} = 1$
 $11 - OA = 3,5 - 3$ kan pakuin

$$AN = CA = 2\sqrt{3} - 3$$

$$MN = \cancel{5} MA + AN = 2\sqrt{3} - 3 + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 3 = 3(\sqrt{3} - 1)$$

Or else: $MN = 3(-\sqrt{3} - 1)$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен

Оценка эксперта: 1 балл.

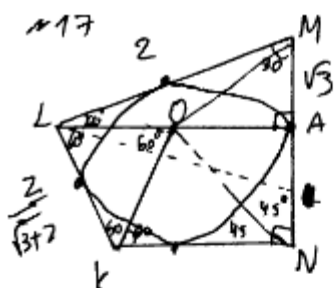
Пример 17.1.4

В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром O . Эта окружность касается стороны MN в точке A . Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.

а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO .

б) Найдите длину стороны MN , если $LA=1$.

Ответ: б) $3\sqrt{3}-3$.



а) т.к. в $KLMN$ вписана окружность, то MO, LO, KO, NO - биссектрисы

$$\angle MLO = \angle OLK = \angle OKN = \angle ONL = 60^\circ$$

т.к. O центр окружности, то $OA \perp MN$.

т.к. $\angle MLA = 60^\circ$
 $\angle LMA = 30^\circ$ } $\triangle LMA$ - прямоугольный, а это возможно лишь тогда, когда $O \in LA$ и $OA \perp MN$

б) в $\triangle LMA$:

т.е.

$$\left. \begin{array}{l} \angle LMA = 30^\circ \\ LA = 1 \end{array} \right\} LM = 2 \cdot LA = 2$$

По т. Пифагора:

$$MA = \sqrt{LM^2 - LA^2} = \sqrt{3}$$

т.к. MO - биссектриса, то по св. биссектрисы:

$$\frac{LM}{LO} = \frac{MA}{OA}$$

$$\text{в } \triangle LOK: \angle OLK = 60^\circ = \angle OKL$$

$\triangle LOK$ - правильный

$$LO = LK = \frac{2}{\sqrt{3}+2}$$

$$2 - 2LO = LO \cdot \sqrt{3}$$

$$LO = \frac{2}{\sqrt{3}+2}$$

в $\triangle OAN$: $\angle OAN = 90^\circ$
 $\angle ONA = 45^\circ$ } $\triangle OAN$ - прямоугольный равнобедренный

$$OA = AN = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}+2}$$

$$MN = \sqrt{3} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}+2} = 6\sqrt{3} - 6$$

Ответ: $6\sqrt{3} - 6$

Комментарий.

Получен неверный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 17.2.1

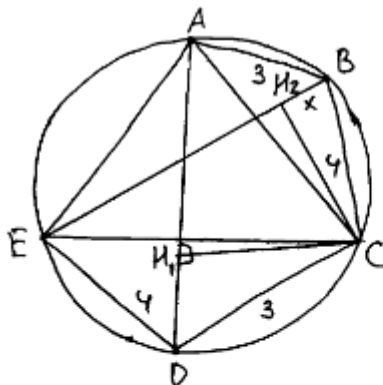
Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали BE , если $AD = 6$.

Ответ: б) $\frac{17}{3}$.

(12)



а) Д-ть: $AC = CE$

б) $BE = ?$ $AD = 6$

а) 1) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$, т.к. их стягивают
одинаковые хорды

$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ED}$, т.к. их стягивают
одинаковые хорды

$$2) \angle ABC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AE} + \frac{1}{2} \overset{\frown}{ED} + \frac{1}{2} \overset{\frown}{CD}$$

$$\angle EDC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC} + \frac{1}{2} \overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2} \overset{\frown}{AE}$$

из (1) следует, что $\angle ABC = \angle EDC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle EDC$ (по 2 стор и углу) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC = EC$ ч.т.д.

4) CH_2 - высота трап $EBCD$

$$H_2B = x$$

$$EB = 2x + 3$$

т.к. $\angle ADC = \angle EBC$ (из (3) п.)

$$\Rightarrow \cos \angle EBC = \frac{H_2B}{EB} = \frac{1}{3}$$

$$H_2B = \frac{4}{3} = x$$

$$EB = \frac{4}{3} \cdot 2 + 3 = \frac{17}{3}$$

Ответ: $BE = \frac{17}{3}$

б) 1) $\angle BCA = \angle CAD$ (опираются
на одинаковые
дуги)

т.к. $\angle BCA$ и $\angle CAD$ накрест-
лежащие $\Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ - ~~параллелограмм~~ $\Rightarrow$ трап.

2) CH_1 - выс. трапеции $ABCD$

$$H_1D = \frac{6-4}{2} = 1$$

$$\cos \angle H_1DC = \frac{1}{3}$$

3) $\angle ADC = \angle EBC$ (опираются на
одинаковые дуги)

$\angle ECD = \angle CEB$ (опираются на
одинаковые дуги)

т.к. $\angle ECD$ и $\angle CEB$ накрест-
лежащие $\Rightarrow EB \parallel CD \Rightarrow$

$\Rightarrow EBCD$ - $\Rightarrow$ трап.

Комментарий.

Приведено верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б.

Оценка эксперта: 3 балла.

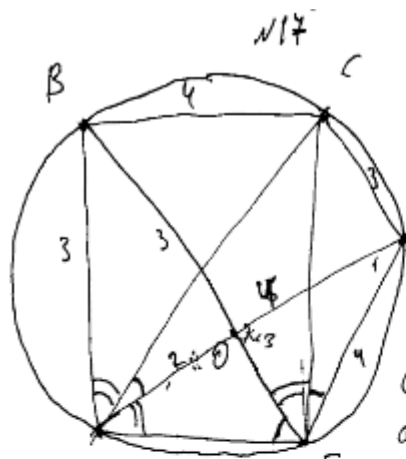
Пример 17.2.2

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали BE , если $AD = 6$.

Ответ: б) $\frac{17}{3}$.



а) 1) т.к. равные дуги стягивают равные хорды; то $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DE}$ и $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{CD}$; тогда $\overset{\frown}{CA}$ через $B = \overset{\frown}{CE}$ через D ; $\Rightarrow CA = CE$; т.к. равные дуги стягивают равными хордами. $CA = CE$ ч. и т. д.
б) Пусть угол центр на дуге с дугой $\alpha = \alpha$; а центр на $3 = \beta$; тогда угол центр.

А на ode : $\alpha + \beta$; тогда пусть $BE \cap AD = O$; тогда

$\angle POE = \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{BA} = \alpha + \beta$; тогда $\angle POE = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}}{2} = \alpha + \beta$;

тогда $OD = OA = 4$; $BC \parallel OD$; т.к. $(\angle CBO = \angle DOE) \Rightarrow$

$\Rightarrow BCOO$ - параллелограмм ($BC \parallel OD$, $BC = OD$) $\Rightarrow BO = CD = 3$

2) $\triangle AOB \sim \triangle ODE$ ($\angle BAO = \angle BOA = \angle DOE = \angle DEO$) $\Rightarrow \frac{AO}{OE} = \frac{AB}{OD}$

$$\frac{AO}{OE} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{AD - OD}{OE} = \frac{3}{4}$$

$$3OE = 4(AD - OD)$$

$$3OE = 4(6 - 4)$$

$$OE = \frac{8}{3}$$

$$BE = BO + OE = 3 + \frac{8}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Ответ: а) доказано б) $BE = 5\frac{1}{3}$

Комментарий.

Приведено верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б.

Оценка эксперта: 3 балла.

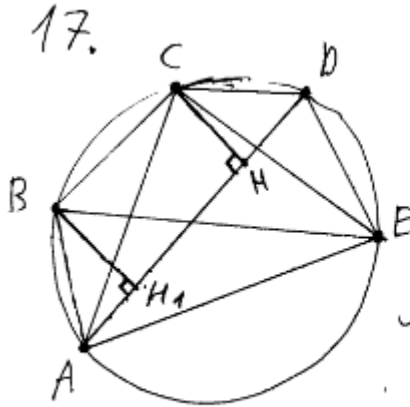
Пример 17.2.3

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали BE , если $AD = 6$.

Ответ: б) $\frac{17}{3}$.



Дано: $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$

б) $AD = 6$

а) Доказать: $AC = CE$

б) Найти: BE

Решение: $AB = CD \Rightarrow \angle ACB = \angle CED$,
 $BC = DE \Rightarrow \angle BAC = \angle DCE$

(м.к. равные хорды стягивают равные дуги)

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 180^\circ - \angle DCE - \angle CED = \angle CDE \Rightarrow$$

$$AB = CD, BC = DE$$

а)

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDE$ по 2-м сторонам и углу $\Rightarrow AC = CE$, ч.и.м.д.

б) $\angle ACB = \angle CED = \angle CAD$ (опир. на $\overset{\frown}{CB}$) $\Rightarrow BC \parallel AD$ (м.к. $\Rightarrow$
 (м.г.к. из а) накрест-лежащие углы равны)

$\Rightarrow ABCD$ - трапеция по опр. $\Rightarrow ABCD$ - равност. трапеция
 $AB = CD$

Пусть CH - высота $ABCD$, BH_1 - высота $ABCD$

$$\angle CHH_1 = 90^\circ = \angle HH_1B = \angle H_1BC \Rightarrow BCHH_1 - \text{прямоугольник} \Rightarrow \\ \Rightarrow BC = HH_1 = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle BAH = \angle CBH \text{ (т.к. } ABCD - \text{равноб. трап.)} \\ AB = CB \\ \angle BH_1A = \angle CH_1B = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABH_1 = \triangle BCH_1 \\ \text{по катету и углу} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AH_1 = BH_1 = \frac{1}{2}(AB - H_1H) = \frac{1}{2} \cdot 4/2 = 1$$

$$\text{По Ш. Симметрии в } \triangle CH_1B: CH = \sqrt{CB^2 - BH_1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AH = AB - BH = 5. \text{ По Ш. Сим. в } \triangle ACH: AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} =$$

$$= 4\sqrt{2} = CE \text{ (т.к. экв. угл. н. а.)}$$

$$\text{По Ш. кос в } \triangle CDE: DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2CD \cdot CE \cdot \cos \angle DCE$$

$$16 = 9 + 32 - \frac{12\sqrt{2}}{2} \cos \angle DCE \cdot 24\sqrt{2}$$

$$24\sqrt{2} \cos \angle DCE = 25, \quad \cos \angle DCE = \frac{25}{24\sqrt{2}}$$

$$\angle DCE = \angle BAC = \angle BEC \text{ (открываются на } BC) \Rightarrow \cos \angle BEC = \frac{25}{24\sqrt{2}} = \frac{25}{24\sqrt{2}}$$

$$\text{По Ш. кос в } \triangle BEC: BC^2 = CE^2 + BE^2 - 2CE \cdot BE \cdot \cos \angle BEC$$

$$16 = 32 + BE^2 - \frac{8\sqrt{2}}{24\sqrt{2}} \cdot BE \cdot \frac{25}{24\sqrt{2}}, \quad 0 = 16 + BE^2 - \frac{25}{3} BE$$

$$(BE - 3)(BE - \frac{16}{3}) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} BE = 3 - \text{невозможно, т.к. при } BE = 3 \\ BE = AB, \text{ тогда } A \text{ совпадает с } E, \\ BE = \frac{16}{3} - \text{что невозможно, т.к.} \\ \text{по условию } ABCDE - \text{пятиугольник} \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \frac{16}{3}$$

Комментарий.

Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки (при вычислении длины стороны AC).

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 17.2.4

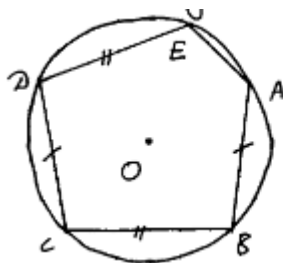
Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали BE , если $AD = 6$.

Ответ: б) $\frac{17}{3}$.

№17



Дано: $ABCDE$ - вписанный, $AB = CD = 3$,

$BC = DE = 4$

а) Д-мб: $AC = CE$

б) $AD = 6$, $BE = ?$

Решение:

а) 1. $CO = OD = R$, $OE = OB = R$, $DE = BC \Rightarrow \triangle DOE = \triangle COB$ (по 3-м см.) $\Rightarrow \angle DOE = \angle COB \Rightarrow \angle DE = \angle BC$

2. $CO = OB = R$, $DO = AO = R$, $CD = AB \Rightarrow \triangle DOC = \triangle AOB \Rightarrow \angle DOC = \angle AOB \Rightarrow \angle DC = \angle AB$

3. $\angle CAB = \frac{1}{2} \angle BC$ - вписанный, $\angle DCE = \frac{1}{2} \angle DE = \frac{1}{2} \angle BC = \angle CAB$

$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AB$, $\angle DEC = \frac{1}{2} \angle CD = \frac{1}{2} \angle AB = \angle ACB$

$\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB - \angle CAB = 180^\circ - \angle DEC - \angle DCE = \angle CDE$

4. $\angle ABC = \angle CDE$, $AB = CD$, $BC = DE \Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDE$ (по 2-м см. и углу м.кн.) $\Rightarrow AC = CE$

ч.м.г.

б) 1. $ABCD$ - вписанный $\Rightarrow \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ \Rightarrow \cos \angle BCD = -\cos \angle BAD$

2. Пусть $\cos \angle BCD = t$, $\cos \angle BAD = -t$

из т. косинусов для $\triangle ABD$: $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cos \angle BAD$

$BD^2 = 36 + 9 + 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot t = 45 + 36t$

из т. косинусов для $\triangle CBD$: $BD^2 = CD^2 + BC^2 - 2CD \cdot BC \cos \angle BCD$

$BD^2 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot t = 25 - 24t$

$45 + 36t = 25 - 24t$; $60t = -20$; $t = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos \angle BCD = -\frac{1}{3}$

3. Из т. косинусов для $\triangle BED$: $BD^2 = BE^2 + DE^2 - 2BE \cdot DE \cos \angle BED$

$\angle BED = \angle BAD$ - вписанные, опирающ. на одну хорду $BD \Rightarrow \cos \angle BED = \cos \angle BAD = -t = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
4. \quad BD^2 &= BE^2 + DE^2 - 2BE \cdot DE \cos \angle BED; \quad BD^2 = BE^2 + 16 + 2 \cdot EB \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \\
BD^2 &= BE^2 + 16 + \frac{8}{3}BE; \quad BD^2 = 45 + 36t = 45 + 12 \cdot 5t \quad 45 - 12 = 33 \\
33 &= BE^2 + 16 + \frac{8}{3}BE; \quad BE^2 + \frac{8}{3}BE - 17 = 0 \\
\frac{D}{4} &= \frac{16}{9} + 17 = \frac{16 + 153}{9} = \frac{169}{9}; \quad BE = \begin{cases} -\frac{4}{3} + \frac{13}{3} = 3 \\ -\frac{4}{3} - \frac{13}{3} < 0 \text{ — не подходит} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ: 3

Комментарий.

Приведено верное доказательство утверждения пункта а. В пункта б получен неверный ответ не из-за арифметической ошибки.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 17.3.1

Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Через точку O провели прямую, параллельную основаниям BC и AD .

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM : MB = 1 : 2$.

Ответ: б) $1:7$.

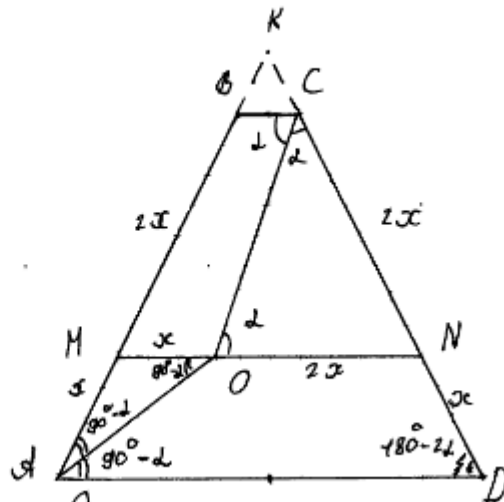
Дано
 $\angle C$ и $\angle O$ - биссектрисы
 $MN \parallel AD$
 $\angle BCD$ - равноб. трап.
 $\angle C = \angle O$
 $AM : MB = 1 : 2$

Доказать

$MN = AB$

Найти

$\frac{AD}{BC} = ?$



Решение

1) Пусть K - пересечение AB и CD

2) Пусть $\angle BCO = \alpha \Rightarrow \angle BCN = 2\alpha$

3) Так как CO и AO - биссектрисы, то
 $\angle BCO = \angle NCO$, $\angle MCO = \angle OAD$

4) Так как $\angle BCD$ - равноб. трапеция
 то $AB = CD$, $AD \parallel BC$, также $\angle BCD = \angle ADC$

по усл. $MN \parallel AD$

$\Rightarrow$ по обр. признакам паралл. прямых

$\angle MCO = \angle OAD$, $\angle BCO = \angle CON$ (накр. лезг.)

$$\angle KBC = \angle KCB = \angle CNM = \angle BMN = \angle BAP = \\ = \angle CDA \text{ (соот. уг.)}$$

$$\angle AMN = \angle MND = \angle ABC = \angle BCD = 2\alpha \text{ (соот. уг.)}$$

$$\Rightarrow \angle CDA = 180^\circ - 2\alpha \text{ (и } \angle \text{ равные } \angle CDA \text{ также)}$$

$$\Rightarrow \angle MAC = \angle MCA = 90^\circ - \alpha,$$

$$\angle NCC = \angle CON$$

$$\Rightarrow \triangle AMO \text{ и } \triangle CON - \text{равноб.} \Rightarrow$$

$$MN = MO + ON = AM + NC$$

$$5) \text{ Так как } \triangle BCD - \text{равноб. тр., } MN \parallel AD$$

$$\Rightarrow AM = ND, MB = CN \Rightarrow$$

$$MN = AM + MB = AB, \text{ т.е. г.}$$

$$6) \text{ Пусть } AM = x \Rightarrow ND = x, BM = CN = 2x$$

$$AC = CO = y$$

По т. синусов

$$\triangle AMO$$

$$\frac{y}{\sin 2\alpha} = \frac{x}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

$$y = x \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha} = 2x \cdot \sin \alpha$$

$$\triangle CON$$

$$\frac{y}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{2x}{\sin \alpha}$$

$$y = 2x \cdot \frac{-\sin(2\alpha - 90^\circ)}{\sin \alpha} =$$

$$= 2x \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 4x \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}
y &= 4x \cdot \cos \alpha = 2x - \sin \alpha \\
\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \operatorname{tg} \alpha = 2 \\
\sin \alpha &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \\
\cos \alpha &= \frac{\sqrt{5}}{5} \\
3) \angle KBC = \angle KCB = \angle KMN = \angle KNM = \\
&= \angle BCD = \angle CDA = \Rightarrow \\
&\triangle KCD \sim \triangle KMN \sim \triangle KBC \\
\Rightarrow \frac{BC}{KB} &= \frac{CD}{BK+3x} \\
&\triangle KMN \\
\angle BKC &= 4\alpha - 180^\circ \\
\frac{MN}{\sin(4\alpha - 180^\circ)} &= \frac{3x}{-\sin 4\alpha} = \frac{BK+2x}{\sin(90^\circ - \sin(180^\circ - 2\alpha))} \\
BK+2x &= 3x \cdot \frac{\sin 2\alpha}{-\sin 4\alpha} = \frac{3x}{-2\cos 2\alpha} = \\
&= \frac{3x}{-2 \cdot (1-2\sin^2 \alpha)} = \frac{3x}{2 \cdot \frac{40-25\sqrt{5}}{25}} = \frac{5x}{2} \\
BK &= 0,5x \\
\frac{BC}{AD} &= \frac{BK}{BK+3x} = \frac{0,5x}{3,5x} = \frac{1}{7} \\
\text{Ответ: } AD:BC &= 7:1.
\end{aligned}$$

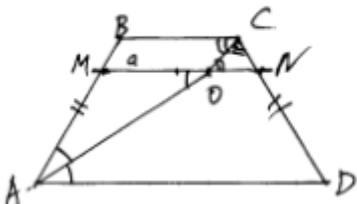
Комментарий.

Приведено верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 17.3.2

№17.
 Дано: $ABCD$ — ρ/δ трап., AO — бисс. $\angle BAD$,
 CO — бисс. $\angle BCD$. $BC \parallel AD$, $AO \perp BC$, $CO \perp AD$.
 а) Док. $MN = AB$.
 б) $\frac{BC}{AD} = ?$, $AO = CO$, $AM:MB = 1:2$.



а) $M = a \cap AB$, $N = a \cap CD$. AO — бисс. $\Rightarrow \angle BAO = \angle OAD$.
 CO — бисс. $\Rightarrow \angle BCO = \angle OCD$.
 Т.к. $BC \parallel MN \parallel AD$, то $\angle MOA = \angle OAD$ и $\angle NOC = \angle OCD$ как нап.
 Тогда $\angle BAO = \angle MOA \Rightarrow \triangle AMO - \rho/\delta \Rightarrow AM = MO$.
 $\angle CON = \angle NOC \Rightarrow \triangle CNO - \rho/\delta \Rightarrow CN = NO$.
 $\angle BMN = \angle BAD$ и $\angle CNM = \angle CDA$ как со. ($MN \parallel AD$)
 Значит, $BCNM$ — ρ/δ трапеция. $\Rightarrow BM = CN$.
 Тогда $MN = MO + ON = AM + CN = AM + BM = AB$ $\checkmark$ т.д.

№17(б).
 Пусть $AM = x$, $MB = 2x$, $\angle AMO = \angle$, $\angle AOC = 180^\circ - \angle$.
 Тогда $MO = x$, $ON = CN = 2x$.
 Д.п.: $AB \cap CD = E$. Т.к. $\angle BAD = \angle CDA$, то $\triangle AED$ — ρ/δ .
 Д.п. EH — медиана, высота и бисс. $\triangle AED$.
 Из $\triangle AOM$ и $\triangle OCN$ по т. кос. $AO = OC = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos \angle = 4x^2 + 4x^2 - 4x^2 \cos \angle$
 $6x^2 = -4x^2 \cos \angle \Rightarrow \cos \angle = -\frac{3}{5}$. $\cos \angle BAD = \cos \angle CDA = \frac{3}{5}$. $\sin \angle BAD = \frac{4}{5}$.
 $AD = BC + 2 AB \cos \angle BAD = BC + \frac{6}{5} AB$
 $\angle EBC = \angle EAD$ (со.) $\angle BEH$ — общий $\Rightarrow \triangle BEK \sim \triangle AEM$.
 $\frac{BC}{AD} = \frac{BK}{AH} = \frac{BE}{AE} = \frac{BE}{BE+AB}$ BK — медиана $\triangle BEC$
 $BE = \frac{BC}{2 \sin \angle BEC} = \frac{BC}{2 \cos \angle BAH} = \frac{5}{6} BC$
 $BC(1 + \frac{5}{6} \frac{AB}{BC}) = AD \cdot \frac{5}{6} \frac{BC}{AB}$
 $\triangle ENO \sim \triangle EDH$ (по 2 углам).
 $\frac{EN}{ED} = \frac{BC}{DN}$ $\frac{EC+2x}{EC+3x} = \frac{BC}{2x}$ $2x(EC+2x) = BC(EC+3x)$

Комментарий.

Верное доказательство утверждения пункта а, решение задания пункта б не завершено.

Оценка эксперта: 1 балл.

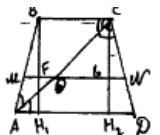
Пример 17.3.3

Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Через точку O провели прямую, параллельную основаниям BC и AD .

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM : MB = 1 : 2$.

Ответ: б) 1:7.



а) 1) $\angle MAO = \angle OAD$ (т.к. AO - биссектриса)
 2) $\angle OAD = \angle MDA$ (т.к. $AD \parallel MN$)
 3) $\triangle AMO$ - равнобедренный (т.к. $\angle MAO = \angle MDA$) $\Rightarrow AM = MO$.
 4) $\angle BCO = \angle OCB$ (CO - биссектриса)
 5) $\angle BCO = \angle ONC$ (т.к. $BC \parallel MN$)
 6) $\triangle ONC$ - равнобедренный (т.к. $\angle BCO = \angle ONC$) $\Rightarrow ON = CN$
 7) $AB = AM + MB$
 8) $BC \parallel MN \sim BCDA$ (т.к. $MN \parallel AD$)
 9) $MB = CN$, тогда $AB = AM + CN$
 10) $MN = MO + ON$
 $MO = AM, ON = CN$ $\Rightarrow MN = AM + CN = AB$. ч.т.в.
 б) Пусть $AM = x$, тогда $MB = 2x$, $MO = x$, $ON = 2x$.
 12) выполним доп. построение: BH_1, CH_2 - перпендикуляры к основаниям.
 13) пусть MF и $NC = y$, тогда $BC = 3x - 2y$.
 14) $\triangle OH_1 \sim \triangle ONC$:
 $\frac{ON}{OC} = \frac{NC}{CH_2}$;
 $OH_1 = \frac{3}{2}y$
 15) $\triangle BAH_1 \sim \triangle BMF$, $AH_1 = \frac{3}{2}y$ (аналогично)
 16) $AD = 3x - y + 2 \cdot \frac{3}{2}y = 3x + 2y$;
 17) $MBCN \sim ABCD$:
 $\frac{MN}{AD} = \frac{CN}{CD} = \frac{2}{3}$;
 $\frac{3x}{3x + 2y} = \frac{2}{3}$
 $9x = 6x + 4y$;
 $3x = 4y$;
 $x = \frac{4}{3}y$;
 18) $\frac{BC}{AD} = \frac{3x - y}{3x + 2y} = \frac{4y - y}{4y + 2y} = \frac{3y}{6y} = \frac{1}{2}$;
 Ответ: б) 0,5.

Комментарий.

Имеется верное доказательство утверждения пункта а, решение задания пункта б не завершено.

Оценка эксперта: 1 баллов.

Пример 17.4.1

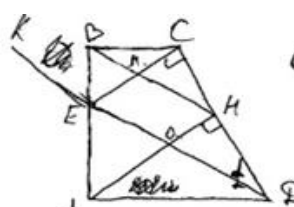
В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

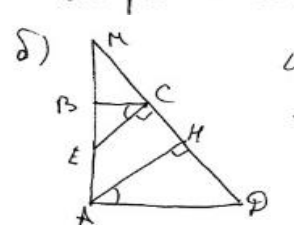
Ответ: б) $3:4$.

а) Пусть $\angle DPH = \alpha$, тогда:



$\angle HOD = 90^\circ - \alpha$; $\angle HOE = 90^\circ - \alpha$. ($\angle HOE = \angle HOD$ как верт.)
 $\angle EOH + \angle HOD = 180^\circ \Rightarrow \angle EOH = 90^\circ + \alpha$
 $\angle ECH = \angle MEO$ (как н.л.у) при $CE \parallel AH$ и сек $EO \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle MEO = 90^\circ - \alpha$ $\angle KEM = 180^\circ - \angle MEO = 90^\circ + \alpha$
 $\angle KEM = \angle BMC$ (как соотв. угл.) $\Rightarrow \angle EMH = \angle BMC = 90^\circ + \alpha$
 $\Rightarrow \angle OHM = 360^\circ - (90^\circ + \alpha) - (90^\circ + \alpha) - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \alpha$
 $\angle CHM = 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \angle BMC = 90^\circ - \alpha$
 $\angle CHM = \angle OHM \Rightarrow \angle KEM = \angle EOH \Rightarrow EC \parallel BH$
 (т.к. равны соотв. угл.) ч.т.р

б)



$\angle BCD = 120^\circ$
 $\angle ECD = 90^\circ \Rightarrow \angle BCE = 30^\circ$
 $\angle BCE = \angle BCD - \angle ECD = 30^\circ$
 $\angle BCE = \angle HAD$
 т.к. $CE \parallel AH$ и $BC \parallel AD$. (аналог н.л.у) $\Rightarrow \angle HAD = 30^\circ \Rightarrow HD = \frac{1}{2} AD$
 $\angle AHD = 60^\circ \Rightarrow \angle MHD = 30^\circ \Rightarrow MD = \frac{1}{2} HD$
 $MD = \frac{1}{2} HD = MH + HD = MH + 0.5 AD \Rightarrow$
 $\Rightarrow MH = 1.5 AD$ и $\triangle MHN \sim \triangle MED$ (по 2 угл.) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{BH}{ED} = \frac{MH}{MD} = \frac{1.5}{0.5} = 3$
 Ответ: $\frac{3}{4}$

Комментарий.

В данном решении есть попытка доказательства утверждения пункта а. Логическая ошибка содержится в записи $\angle KEM = \angle BMC$ – это возможно только при параллельности прямых BH и ED , а как раз это и требовалось доказать. Верный ответ в пункте б получен обоснованно с использованием недоказанного утверждения пункта а.

Оценка эксперта: 1 балл.

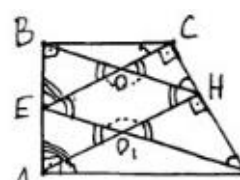
Пример 17.4.2

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AN . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

Ответ: б) 3:4.

Дано: $ABCD$ – трапеция $BC \perp AB \perp AD$ $AN \perp CD$ $CE \perp CD$ а) Доказать: $BH \parallel ED$	 Доказательство: 1) т.к. $AN \perp CD$ и $CE \perp CD$, то $AN \parallel CE$; 2) AB – секущая при двух $\parallel$ прямых, значит $\angle BEC = \angle BAN$; 3) BH – тоже секущая, значит $\angle BOE = \angle CON = \angle BNA$; 4) ED – тоже секущая, значит $\angle CED = \angle EO_1A = \angle HO_1D$; 5) $\angle EOH = 180^\circ - \angle CON$ (смеж. углы), $\angle EO_1H = 180^\circ - \angle BNA$. т.к. $\angle CON = \angle BNA$, то $\angle EOH = \angle EO_1H$, следовательно, $EOHO_1$ – параллелограмм, а его противоположные стороны $=$ и $\parallel$, значит, $BH \parallel ED$.
---	---

Комментарий.

Имеется попытка доказательства утверждения пункта а. Логическая ошибка содержится в записи 5) – при вычислении угла $\angle EO_1H$: $\angle EO_1H = 180^\circ - \angle EO_1A$. Замена угла $\angle EO_1A$ углом $\angle BNA$ возможна только при условии параллельности прямых BH и ED , а как раз это и требовалось доказать.

Оценка эксперта: 0 баллов.

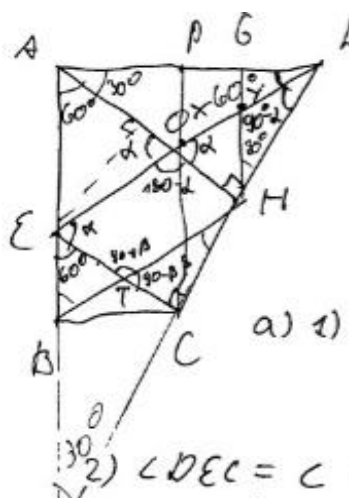
Пример 17.4.3

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH . На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED , если $\angle BCD = 120^\circ$.

Ответ: б) 3:4.



Дано: $AH \perp CD$ $\angle BCD = 120^\circ$
 $CE \perp CD$ и $CE \cap AB = E$
 а) Д-ть: $BH \parallel ED$
 б) $\frac{BH}{ED} = ?$

а) 1) $AH \perp CD$
 $CE \perp CD$ } $\Rightarrow$ покр. перп. прямых $AH \parallel EC$
 2) $\angle DEC = \angle DHN$ как соотв.
 3) $\angle DHN = 90^\circ - \alpha$
 4) Пусть $AB = x$ $AH = y$ 5) ~~$ABET$~~ ~~и т.д.~~
 6) $\triangle BET \sim \triangle BAN$ по 2-м углам ($\angle BAN$ - общий, $\angle BET = \angle BAN$ как соотв.) k - коэффициент подобия
 7) $AE = AB - BE = AB - kAB = x(1-k)$
 $AO = AH - OH = AH - kAH = y(1-k)$
 8) $\triangle AEO \sim \triangle ABH$ по углу и 2-м сторонам
 ($\angle A$ - общий; $\frac{AO}{AH} = \frac{1-k}{1} = 1-k$ и $\frac{AE}{AB} = 1-k$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AEO = \angle ABH$
 б) ~~$\triangle AEO \sim \triangle ABH$~~ т.к. $\angle AEO = \angle ABH$, то
 по признаку параллельности прямых (прямые парал., если соотв. углы равны) $ED \parallel BH$ и т.д.

Комментарий.

Логическая ошибка: доказательство утверждения пункта а опирается на дополнительное условие из пункта б.

Оценка эксперта: 0 баллов.

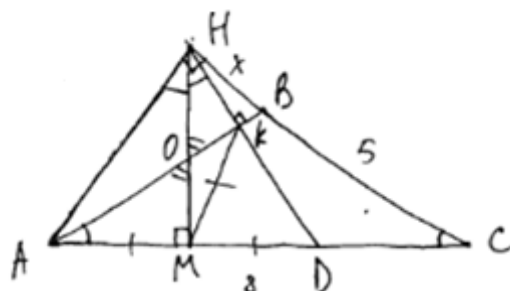
Пример 17.5.1

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH . Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры NK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK , если $AB=5$, $AC=8$.

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.



а) $\triangle ABE$: $\rho(\beta) \Rightarrow \angle BAE \angle BSA$ (1)
 $\triangle AHE$: $\rho(\beta) \Rightarrow \angle HAE \angle HSA$ (2)
 $\triangle AHE \sim \triangle AHM \Rightarrow \angle AHE \angle AHM$ (3)
 $\triangle AOM \sim \triangle ONK$ (4) $\Rightarrow \angle OAM \angle ONK$ (5)
 (1), (2), (3) $\Rightarrow OH$ — биссектриса $\triangle AKB$.
~~продолжим~~ продолжим прямую NK до
 стороны AC . $\triangle AKD$:

NH — биссектриса $\Rightarrow \triangle AKD$ — $\rho(\beta) \Rightarrow NH$ — медиана $\Rightarrow AM = MD$
 $\triangle AKD$: $\rho(\beta) \Rightarrow AM = MD \Rightarrow KM$ — биссектриса $\Rightarrow \angle KMA \angle KMD$
 $\angle KMA \angle KMD \Rightarrow KM = AM$ ч. т. д.

б) пусть $KB = x$ ~~$AK = x$~~ $\triangle AKB$: $\rho(\beta) \Rightarrow AK^2 = AB^2 - KB^2$
 $\triangle AKC$: $\rho(\beta) \Rightarrow AK^2 = AC^2 - KC^2 \Rightarrow AB^2 - KB^2 = AC^2 - KC^2$
 $25 - x^2 = 64 - (8-x)^2 \Rightarrow 2KB \cdot CB = KB^2$ $KB = 1,4$
 $\triangle AKC$: $KC^2 = MC \cdot AC$ $(1,4)^2 = 8 \cdot CM$ $CM = 5,12$
 $AM = AC - MC = 8 - 5,12 = 2,88$
 $AM = MK \Rightarrow MK = 2,88$

Ответ: б) $MK = 2,88$

Комментарий.

В доказательстве пункта а) некорректно указано, что KM — биссектриса, при этом тут же записаны утверждения относительно KM , соответствующие медиане прямоугольного треугольника.

Решение пункта б) выполнено верно.

Оценка эксперта: 3 балла.

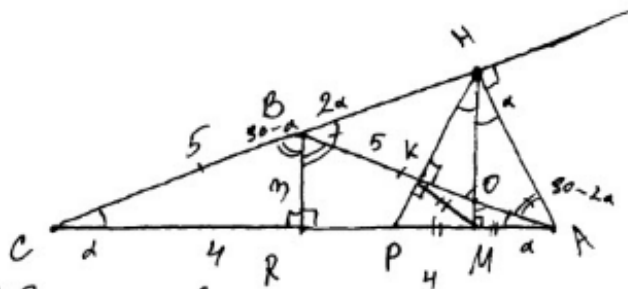
Пример 17.5.2

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH . Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры NK и NM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK , если $AB=5$, $AC=8$.

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.



а) Доказательство:

Пусть $\angle BCA = \alpha$.
Т.к. $\triangle ABC$ - равнобедренный,
то и $\angle BAC = \alpha$.

$$\angle CBA = 180 - 2\alpha$$

Пусть $BR \perp AC$, тогда $CR = RA$,
 $\angle CBR = \angle RBA = \angle CBA = \frac{180-2\alpha}{2} = 90-\alpha$.

$\angle ABH = 180^\circ - \angle CBA = 180^\circ - (180-2\alpha) = 2\alpha$
Т.к. $\triangle BAH$ - прямоугольный ($AH \perp BC$),
то $\angle BAH = 90-2\alpha$.

$$\angle KHA = 180 - 90 - (90-2\alpha) = 2\alpha.$$

$\triangle BHA \sim \triangle KHA$ по трём углам.

Пусть $AB \cap NM = O$.

$$\angle AOM = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha.$$

$\angle AOM = \angle KON$ как вертикальные углы.

$$\angle KNO = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha.$$

$$\angle KNO = \alpha, \angle KHA = 2\alpha, \text{ тогда } \angle OHA = \alpha.$$

Пусть $NK \cap AC = P$, тогда
 $\triangle ANP$ - равнобедренный,
т.к. $NM \perp AP$, $\angle KNO = \angle ONA$.

Дано:

$$\angle ABC = 90^\circ \quad AB = 5$$

$$AB = BC \quad AC = 8$$

$$AH \perp BC$$

$$NK \perp AB$$

$$NM \perp AC$$

Доказать:

а) $AM = MK$ - ?

Найти: б) MK - ?

$$\angle HPA = \angle MAN = 90 - 2\alpha + \alpha = 90 - \alpha.$$

$PM = MA$, т.к. NM -

- высота, медиана, биссектриса
равнобедренного $\triangle ANP$.

$\triangle PKA$ - прямоугольный, т.к. $NK \perp AB$.

Около $\triangle PKA$ можно описать
окружность, и из-за того,
что $\triangle PKA$ - прямоугольный,
её центр будет лежать
в середине гипотенузы -
тоже M . AP будет её
диаметром, PM , AM и MK -
радиусами.

Получается, что
 $PM = AM = MK$
что и требовалось
доказать.

б) Т.к. $BR \perp AC$ и $\triangle ABC$ -
равнобед., то $CR = RA =$
 $= \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

По теореме Пифагора:

$$BR^2 = AB^2 - AR^2$$

$$BR^2 = 25 - 16 = 9$$

$$BR = \sqrt{9} = 3.$$

$\triangle BRA$ подобен $\triangle KPA$ по

трем углам ($\angle BRA = \angle KPA = 90^\circ$,
 $\angle RBA = \angle APK = 90 - \alpha$; $\angle PAK = \angle RAB = \alpha$);

ΔKPA , в свою очередь, подобен ΔAOM по трем углам ($\angle APM = \angle KPA = 90^\circ$; $\angle PAK = \angle MAO = \alpha$; $\angle AOM = \angle APK = 90^\circ - \alpha$), следовательно стороны этих треугольников перпендикулярны:

$$\frac{AO}{AP} = \frac{AM}{AK} = \frac{OM}{KP}, \text{ и так как } PM=AM, AP=2AM,$$

коэффициент подобия $\triangle KPA$ и $\triangle AOM$

равен 2.

$$\cos \alpha = \frac{AR}{AB} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Рассмотрим $\triangle PKM$, он - равнобедренный ($PM = KM$),
тогда $\angle KPM = \angle PKM = 80^\circ - \alpha$.
Тогда $\angle PMK = 180^\circ - 2(80^\circ - \alpha) = 2\alpha$.

$$\cos \angle KPM = \cos (90 - \alpha) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha.$$

$$\sin \alpha = \frac{BR}{AR} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Пусть $PM = AM = MK = x$
По теореме косинусов для $\triangle PKM$:

$$PK^2 = PM^2 + MK^2 - 2 \cdot PM \cdot MK \cdot \cos \angle KPM$$

$$PK^2 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \sin \alpha$$

$$PK^2 = 2x^2 - 1,2x^2 = 0,8x^2$$

$$PK = \sqrt{\frac{8}{10} \pi^2} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{2\pi\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\pi\sqrt{5}}{5}$$

По распоряжению Писаренко глас. АРК:

$$AK^2 = AP^2 - PK^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{20x^2}{25} + 5 - \frac{80x^2}{25}$$

$$AK^2 = 4x^2 - 0,8x^2 = 3,2x^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{125 - 60x^2}{25}$$

$$AK = \pi \sqrt{\frac{82}{10}} = 4\pi \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{4\pi\sqrt{5}}{5}$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \underline{25 - 12x^2}$$

$$\frac{AK}{PK} = \frac{\frac{4 \times \sqrt{5}}{5}}{\frac{2 \times \sqrt{5}}{5}} = 2, \quad BK = 5 - AK$$

$$\begin{aligned} 80 - 80x + 20x^2 &= 25 - 12x^2 \\ 8x^2 - 80x + 65 &= 0. \end{aligned}$$

$$D = 6400 - 2080 = 4320$$

$$\sqrt{4320} = 12\sqrt{30}$$

$$x = \frac{12\sqrt{30} + 80}{16} = \frac{3\sqrt{30}}{4} + 5 =$$

$$= \frac{3\sqrt{30} + 20}{4} \text{ MK};$$

По теореме Пифагора
для $\triangle BKP$:

$$BP^2 = BK^2 + KP^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = BK^2 + KP^2$$

$$BP^2 = BK^2 + KP^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = BK^2 + x^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{20x^2}{25} + (5 - (4x^2 + \frac{20x^2}{25}))$$

Orbem: $\frac{3\sqrt{30} + 20}{4}$;

Комментарий.

Доказательство утверждения пункта *a* верно. Правда, следует отметить, что в доказательстве получено много верных утверждений, которые не нужны для доказательства равенства отрезков *AM* и *MK*, кроме того, некорректно формулируется признак подобия треугольников.

В решении пункта б допущена ошибка при вычислении длины отрезка PK – вместо $\cos \angle KPM$ должно быть $\cos \angle KMP$.

Оценка эксперта: 1 балл.

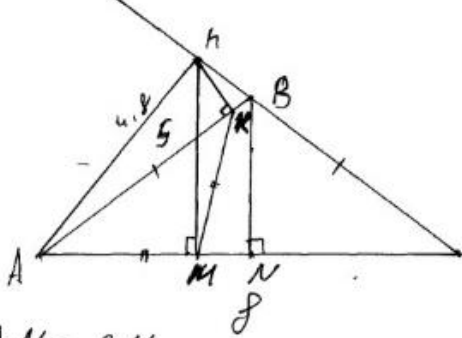
Пример 17.5.3

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH . Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK , если $AB=5$, $AC=8$.

Ответ: б) $\frac{72}{25}$.



Дано: $AB=BC$; $\triangle ABC$
 $AB=5$
 $BC=8$
 $AK \perp AB$
 $HM \perp AC$
 $MK = ?$

$AN = CN$
 $AM = \frac{1}{2} AC = \frac{8}{2} = 4$
 $\cos A = 0.8 = \frac{AN}{AB} = \frac{4}{5}$
 $\frac{AH}{AB} = \frac{4}{5}$
 $\cos A = \cos C = 0.8$ в $\triangle ABC$
 $\frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$
 $\frac{hC}{8} = \frac{4}{5}$
 $5hC = 32$
 $hC = 6.4$
 $\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - 0.64 = 0.36$
 $\sin C = 0.6$
 $\sin C = \cos A$ в $\triangle ACH$
 $\frac{AM}{Ah} = \frac{0.6}{4.8} = \frac{1}{8}$
 $\frac{AM}{Ah} = \frac{3.4}{5}$
 $AM = 1.44$
 $AM = MK = 2.88$

Ответ: $MK = 2.88$

Комментарий.

Доказательство утверждения пункта а) отсутствует. Решение пункта б) выполнено верно с использованием недоказанного утверждения пункта а).

Оценка эксперта: 1 балл.

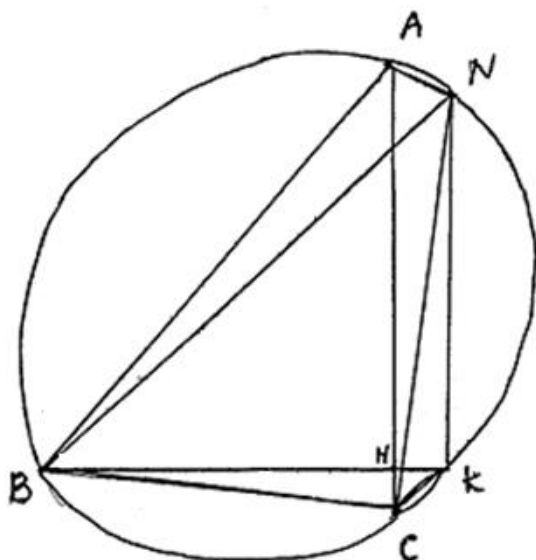
Пример 17.6.1

В остроугольном треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC , вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K . Отрезок BK – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите NK , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 16, $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ACB = 85^\circ$.

Ответ: б) $16\sqrt{2}$.



Дано:

$BH \perp AC$
 BK – диаметр

а) Док-ть:

$AN = CK$

б) $R = 16$

$\angle BAC = 40^\circ$

$\angle ACB = 85^\circ$

Найти:

NK – ?

а) Док-во: $\angle BCK = 90^\circ$, т.к. BK – диаметр, $\Rightarrow \angle BCK = 90^\circ - \angle HBC \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle HCN = \angle HBC$, $\angle HCN = \angle ABN$ (т.к. они опираются на одну дугу) $\Rightarrow \angle ABN = \angle HBC \Rightarrow AN = CK$ (как хорды, стягивающие равные дуги).

Комментарий.

В доказательстве утверждения пункта а есть верное название прямого угла – « $\angle BCK = 90^\circ$ », при этом тут же записано противоречащее условию утверждение « BK – диаметр». Утверждение, записанное во второй строчке – « $\angle HCN = \angle ABN$ (т.к. они опираются на одну дугу)», – содержит неточность, поскольку точка H не лежит на окружности, а $\angle ACN = \angle ABN$ (так как они опираются на одну дугу). Решение пункта б отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 17.6.2

В остроугольном треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC , вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K . Отрезок BH – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите NK , если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 16, $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ACB = 85^\circ$.

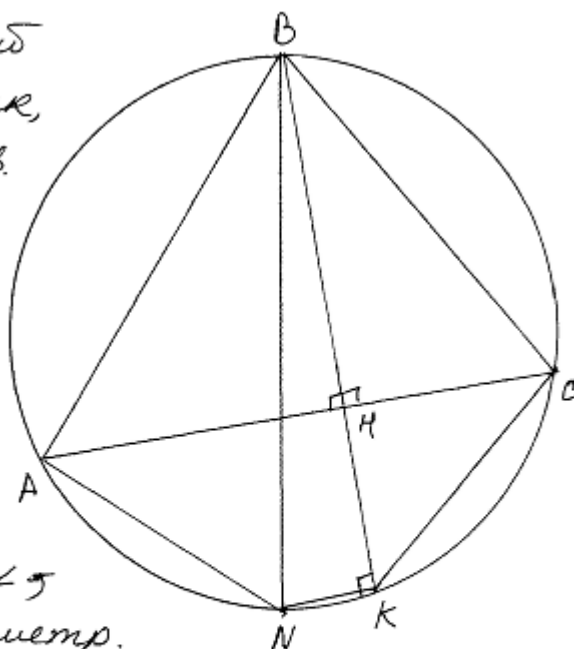
Ответ: б) $16\sqrt{2}$.

а) Пусть ABC – произвольный остроугольный треугольник, вписанный в окружность.

BH – диаметр, BH – высота $\triangle ABC$, прямая BK содержит высоту BH и пересекает окр. в точке K . $\angle ANB = 90^\circ$ (т.к. BH – высота.)

$\angle NKB$ – вписанный $\angle$, опирающийся на диаметр.

$\Rightarrow \angle NKB = 90^\circ \Rightarrow$ Прямая $AC \parallel$ прямой $NK \Rightarrow ACKN$ – трапеция. По св-ву трапеции, вписанной в окружность её стороны равны. $AN = CK$ ч.т.д.



Комментарий.

При выполнении пункта а используется недоказанное утверждение, что $ACKN$ – трапеция. В решении есть некорректное утверждение: «по свойству трапеции, вписанной в окружность, её стороны равны», при этом рядом записано верное равенство боковых сторон. Решение пункта б отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

6. Критерии проверки и оценка решений задания 18

Задание № 18 — это уравнение, неравенство или их системы с параметром.

Задачи с параметром допускают весьма разнообразные способы решения. Наиболее распространёнными из них являются:

- чисто алгебраический способ решения;
- способ решения, основанный на построении и исследовании геометрической модели данной задачи;
- функциональный способ, в котором могут быть и алгебраические, и геометрические элементы, но базовым является исследование некоторой функции.

Зачастую (но далеко не всегда) графический метод более ясно ведёт к цели. Кроме того, в конкретном тексте решения вполне могут встречаться элементы каждого из трёх перечисленных способов.

Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не степень следования «эталонному» решению.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную.

Задача 18 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2026 г.)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Каждое решение уравнения $(x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0$ либо является решением уравнения $x - y + 3 = 0$, откуда $y = x + 3$, либо является решением системы:

$$\begin{cases} x^2 - 5x - y + 3 = 0, \\ x - y + 3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ y \leq x + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ x^2 - 5x + 3 \leq x + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ x^2 - 6x \leq 0, \end{cases}$$

откуда $y = x^2 - 5x + 3$ при условии $0 \leq x \leq 6$.

Для каждого из этих случаев подставим $y = 3x + a$ и найдём количество корней получившегося уравнения в зависимости от a .

Первый случай: $3x + a = x + 3$, откуда $x = \frac{3-a}{2}$.

Второй случай: $3x + a = x^2 - 5x + 3$ при условии $0 \leq x \leq 6$. Получаем квадратное уравнение $x^2 - 8x - a + 3 = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $64 + 4(a - 3) = 4(a + 13)$. Значит, уравнение $x^2 - 8x - a + 3 = 0$ имеет два корня при $a > -13$, имеет единственный корень $x = 4$ при $a = -13$ и не имеет корней при $a < -13$.

При $a > -13$ функция $f(x) = x^2 - 8x - a + 3$ принимает наименьшее значение при $x = 4$, и это значение отрицательно. Следовательно, больший корень уравнения $f(x) = 0$

удовлетворяет условию $0 \leq x \leq 6$ тогда и только тогда, когда $f(6) \geq 0$; $-a-9 \geq 0$, откуда $a \leq -9$.

Аналогично меньший корень уравнения $f(x) = 0$ удовлетворяет условию $0 \leq x \leq 6$ тогда и только тогда, когда $f(0) \geq 0$; $-a+3 \geq 0$, откуда $a \leq 3$.

Число $\frac{3-a}{2}$ является корнем квадратного уравнения $f(x) = 0$

при $\left(\frac{3-a}{2}\right)^2 - 4(3-a) - a + 3 = 0$, откуда

$$\left(\frac{a-3}{2}\right)^2 + 3(a-3) = 0; (a-3)(a+9) = 0,$$

то есть при $a = 3$ и при $a = -9$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при $a = -13$; $-9 \leq a < 3$.

Ответ: $a = -13$; $-9 \leq a < 3$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением / включением точек $a = -9$ и / или $a = 3$	4
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-9; 3)$ множества значений a , возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	3
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически)	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	1
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением / включением точек $a = -9$ и / или $a = 3$	0
Максимальный балл	4

ИЛИ

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left(|x-a^2| + |x+1|\right)^2 - 7\left(|x-a^2| + |x+1|\right) + 4a^2 + 4 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Рассмотрим кусочно-линейную функцию $y = |x-a^2| + |x+1|$.

При $x < -1$ имеем $y = -2x + a^2 - 1$, при $-1 \leq x < a^2$ имеем $y = a^2 + 1$, при $x \geq a^2$ имеем $y = 2x - a^2 + 1$. На промежутке $(-\infty; -1]$ функция убывает, $y(-1) = a^2 + 1$;

на промежутке $[-1; a^2]$ функция принимает постоянное значение $a^2 + 1$; на промежутке $[a^2; +\infty)$ функция возрастает, $y(a^2) = a^2 + 1$. Таким образом, значение $y = a^2 + 1$ принимается при всех x таких, что $-1 \leq x \leq a^2$; значения $y < a^2 + 1$ не принимаются ни при каких x , а каждое из значений $y > a^2 + 1$ принимается при двух различных x .

Для того чтобы исходное уравнение имело ровно два различных корня, должны выполняться следующие условия: на промежутке $(a^2 + 1; +\infty)$ уравнение $y^2 - 7y + 4a^2 + 4 = 0$ должно иметь ровно один корень, причём число $a^2 + 1$ не должно являться корнем этого уравнения.

Эти условия выполнены в двух случаях.

В первом случае уравнение $y^2 - 7y + 4a^2 + 4 = 0$ имеет единственный корень, причём он больше $a^2 + 1$. Дискриминант уравнения $D = 33 - 16a^2$ равен нулю при $a = -\frac{\sqrt{33}}{4}$ или $a = \frac{\sqrt{33}}{4}$. При каждом из этих значений a уравнение имеет ровно один корень

$3,5 > a^2 + 1 = \frac{49}{16}$, поэтому $a = -\frac{\sqrt{33}}{4}$ и $a = \frac{\sqrt{33}}{4}$ удовлетворяют условию задачи.

Во втором случае уравнение $y^2 - 7y + 4a^2 + 4 = 0$ имеет два корня, причём один из них больше $a^2 + 1$, а другой меньше $a^2 + 1$. Это равносильно тому, что $f(a^2 + 1) < 0$, где $f(y) = y^2 - 7y + 4a^2 + 4$. Поскольку

$$f(a^2 + 1) = (a^2 + 1)^2 - 7(a^2 + 1) + 4a^2 + 4 = a^4 - a^2 - 2 = (a^2 - 2)(a^2 + 1),$$

неравенство $f(a^2 + 1) < 0$ равносильно неравенству $(a^2 - 2)(a^2 + 1) < 0$, откуда получаем: $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.

Ответ: $a = -\frac{\sqrt{33}}{4}$; $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$; $a = \frac{\sqrt{33}}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = -\sqrt{2}$ и / или $a = \sqrt{2}$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -\frac{\sqrt{33}}{4}$ и / или $a = \frac{\sqrt{33}}{4}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию расположения корней квадратного уравнения $y^2 - 7y + 4a^2 + 4 = 0$, где $y = x - a^2 + x + 1 $	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 18.1

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)^2+a\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)+a^2-16=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Рассмотрим кусочно-линейную функцию $y=|x-a-1|+|x-a+1|$. При $x < a-1$ имеем $y=-2x+2a$, при $a-1 \leq x < a+1$ имеем $y=2$, при $x \geq a+1$ имеем $y=2x-2a$. На промежутке $(-\infty; a-1]$ функция убывает, $y(a-1)=2$; на промежутке $[a-1; a+1]$ функция принимает постоянное значение 2; на промежутке $[a+1; +\infty)$ функция возрастает, $y(a+1)=2$. Таким образом, значение $y=2$ принимается при всех x таких, что $a-1 \leq x \leq a+1$; значения $y < 2$ не принимаются ни при каких x , а каждое из значений $y > 2$ принимается при двух различных x .

Для того чтобы исходное уравнение имело ровно два различных корня, должны выполняться следующие условия: на промежутке $(2; +\infty)$ уравнение $y^2+ay+a^2-16=0$ должно иметь ровно один корень, причём число 2 не должно являться корнем этого уравнения.

Эти условия выполнены в двух случаях.

В первом случае уравнение $y^2+ay+a^2-16=0$ имеет единственный корень, причём он больше 2. Дискриминант уравнения $D=64-3a^2$ равен нулю при $a=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$ или $a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

При $a=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$ уравнение имеет ровно один корень $\frac{4\sqrt{3}}{3} > 2$, поэтому $a=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$

удовлетворяет условию задачи. При $a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ уравнение имеет ровно один корень

$-\frac{4\sqrt{3}}{3} \leq 2$, поэтому $a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ не удовлетворяет условию задачи.

Во втором случае уравнение $y^2+ay+a^2-16=0$ имеет два корня, причём один из них больше 2, а другой меньше 2. Это равносильно тому, что $f(2) < 0$, где $f(y)=y^2+ay+a^2-16$. Решая неравенство $a^2+2a-12 < 0$, получим: $-1-\sqrt{13} < a < -1+\sqrt{13}$.

Ответ: $a=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$; $-1-\sqrt{13} < a < -1+\sqrt{13}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = -1 - \sqrt{13}$ и / или $a = -1 + \sqrt{13}$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением точки $a = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию расположения корней квадратного уравнения $y^2 + ay + a^2 - 16 = 0$, где $y = x - a - 1 + x - a + 1 $	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 18.2

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

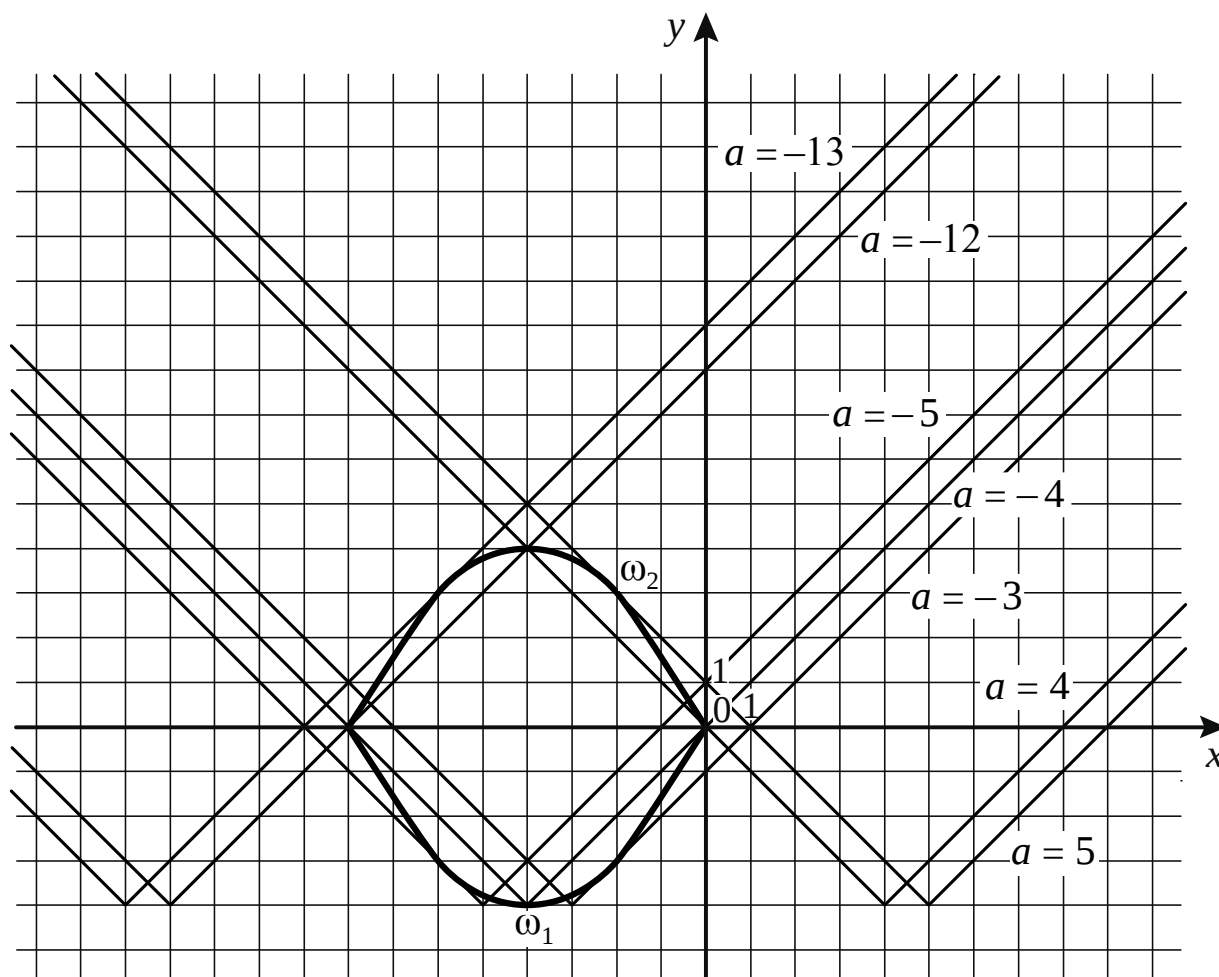
$$\begin{cases} y = |x - a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение.

Уравнение $y = |x - a| - 4$ задаёт на плоскости Oxy пару лучей с общим началом в точке $(a; -4)$: луч l_1 , совпадающий с прямой $y = -x + a - 4$ при $x \leq a$, и луч l_2 , совпадающий с прямой $y = x - a - 4$ при $x \geq a$.

Уравнение $4|y| + x^2 + 8x = 0$ задаёт на плоскости Oxy множество точек, представляющее собой объединение дуги ω_1 параболы $y = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4$ с концами в точках $(-8; 0)$ и $(0; 0)$ и дуги ω_2 параболы $y = -\frac{1}{4}(x+4)^2 + 4$ с концами в тех же точках.



Рассмотрим варианты расположения луча l_1 и дуг ω_1 и ω_2 .

При $a = -4$ луч проходит через концевую точку дуг $(-8; 0)$, при $a = 4$ — через концевую точку дуг $(0; 0)$.

Найдём значение a , при котором прямая $y = -x + a - 4$ и парабола $y = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4$ касаются, то есть имеют ровно одну общую точку. В этом случае уравнение $-x + a - 4 = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4$ должно иметь единственный корень. Запишем это уравнение в виде $\frac{1}{4}x^2 + 3x - a + 4 = 0$, дискриминант этого квадратного уравнения $D = 9 + a - 4 = a + 5$. При условии $D = 0$, которое выполнено при $a = -5$, уравнение имеет единственный корень $x = -6$. Значит, касание прямой и параболы происходит при $a = -5$, причём точка касания имеет координаты $(-6; -3)$. Эта точка принадлежит одновременно дуге ω_1 и лучу l_1 .

Найдём значение a , при котором прямая $y = -x + a - 4$ и парабола $y = -\frac{1}{4}(x+4)^2 + 4$ касаются, то есть имеют ровно одну общую точку. В этом случае уравнение $-x + a - 4 = -\frac{1}{4}(x+4)^2 + 4$ должно иметь единственный корень. Запишем это уравнение в виде $\frac{1}{4}x^2 + x + a - 4 = 0$, дискриминант этого квадратного уравнения $D = 1 - a + 4 = 5 - a$. При условии $D = 0$, которое выполнено при $a = 5$, уравнение имеет единственный корень $x = -2$. Значит, касание прямой и параболы происходит при $a = 5$, причём точка касания имеет координаты $(-2; 3)$. Эта точка принадлежит одновременно дуге ω_2 и лучу l_1 .

Рассмотрим варианты расположения луча l_2 и дуг ω_1 и ω_2 .

При $a = -12$ луч проходит через концевую точку дуг $(-8; 0)$, при $a = -4$ — через концевую точку дуг $(0; 0)$.

Найдём значение a , при котором прямая $y = x - a - 4$ и парабола $y = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4$ касаются, то есть имеют ровно одну общую точку. В этом случае уравнение $x - a - 4 = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4$ должно иметь единственный корень. Запишем это уравнение в виде $\frac{1}{4}x^2 + x + a + 4 = 0$, дискриминант этого квадратного уравнения $D = 1 - a - 4 = -a - 3$. При условии $D = 0$, которое выполнено при $a = -3$, уравнение имеет единственный корень $x = -2$. Значит, касание прямой и параболы происходит при $a = -3$, причём точка касания имеет координаты $(-2; -3)$. Эта точка принадлежит одновременно дуге ω_1 и лучу l_2 .

Найдём значение a , при котором прямая $y = x - a - 4$ и парабола $y = -\frac{1}{4}(x+4)^2 + 4$ касаются, то есть имеют ровно одну общую точку. В этом случае уравнение $x - a - 4 = -\frac{1}{4}(x+4)^2 + 4$ должно иметь единственный корень. Запишем это уравнение в виде $\frac{1}{4}x^2 + 3x - a - 4 = 0$, дискриминант этого квадратного уравнения $D = 9 + a + 4 = a + 13$. При условии $D = 0$, которое выполнено при $a = -13$, уравнение имеет единственный корень

$x = -6$. Значит, касание прямой и параболы происходит при $a = -13$, причём точка касания имеет координаты $(-6; 3)$. Эта точка принадлежит одновременно дуге ω_2 и лучу l_2 .

Точка пересечения прямых l_1 и l_2 принадлежит объединению дуг ω_1 и ω_2 при $a = -4$.

Таким образом, найдено семь граничных значений параметра: $a = -13$ (система уравнений имеет одно решение), $a = -12$ (два решения), $a = -5$ (три решения), $a = -4$ (три решения), $a = -3$ (три решения), $a = 4$ (два решения), $a = 5$ (одно решение).

Используя рисунок, получаем, что система уравнений имеет четыре решения при $-5 < a < -4$ и $-4 < a < -3$.

Ответ: $-5 < a < -4$; $-4 < a < -3$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = -5$ и / или $a = -3$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-5; -3)$ множества значений a , возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг парабол и лучей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 18.3

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Каждое решение уравнения $(x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0$ либо является решением уравнения $x - y + 3 = 0$, откуда $y = x + 3$, либо является решением системы:

$$\begin{cases} x^2 - 5x - y + 3 = 0, \\ x - y + 3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ y \leq x + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ x^2 - 5x + 3 \leq x + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3, \\ x^2 - 6x \leq 0, \end{cases}$$

откуда $y = x^2 - 5x + 3$ при условии $0 \leq x \leq 6$.

Для каждого из этих случаев подставим $y = 3x + a$ и найдём количество корней получившегося уравнения в зависимости от a .

Первый случай: $3x + a = x + 3$, откуда $x = \frac{3-a}{2}$.

Второй случай: $3x + a = x^2 - 5x + 3$ при условии $0 \leq x \leq 6$. Получаем квадратное уравнение $x^2 - 8x - a + 3 = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $64 + 4(a - 3) = 4(a + 13)$. Значит, уравнение $x^2 - 8x - a + 3 = 0$ имеет два корня при $a > -13$, имеет единственный корень $x = 4$ при $a = -13$ и не имеет корней при $a < -13$.

При $a > -13$ функция $f(x) = x^2 - 8x - a + 3$ принимает наименьшее значение при $x = 4$, и это значение отрицательно. Следовательно, больший корень уравнения $f(x) = 0$ удовлетворяет условию $0 \leq x \leq 6$ тогда и только тогда, когда $f(6) \geq 0$; $-a - 9 \geq 0$, откуда $a \leq -9$.

Аналогично меньший корень уравнения $f(x) = 0$ удовлетворяет условию $0 \leq x \leq 6$ тогда и только тогда, когда $f(0) \geq 0$; $-a + 3 \geq 0$, откуда $a \leq 3$.

Число $\frac{3-a}{2}$ является корнем квадратного уравнения $f(x) = 0$

при $\left(\frac{3-a}{2}\right)^2 - 4(3-a) - a + 3 = 0$, откуда

$$\left(\frac{a-3}{2}\right)^2 + 3(a-3) = 0; (a-3)(a+9) = 0,$$

то есть при $a = 3$ и при $a = -9$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при $a = -13$; $-9 \leq a < 3$.

Ответ: $a = -13$; $-9 \leq a < 3$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением / включением точек $a = -9$ и / или $a = 3$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-9; 3)$ множества значений a , возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>4</i>

Задание 18.4

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных корня.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению $3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2$ при условии $x^2 + ax + 1 \geq 0$.

Решим уравнение $3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2$:

$$3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2)x^2 + 2ax + 1; \quad x^4 + 2ax^3 + (a^2 - 1)x^2 = 0;$$

$$x^2(x + a + 1)(x + a - 1) = 0, \text{ откуда } x = 0, \quad x = 1 - a \text{ или } x = -1 - a.$$

Исходное уравнение имеет три корня, когда эти числа различны и для каждого из них выполнено условие $x^2 + ax + 1 \geq 0$.

Рассмотрим условия совпадения корней. При $a = 1$ имеем $1 - a = 0$. При $a = -1$ имеем $-1 - a = 0$. При остальных значениях a числа 0 , $1 - a$, $-1 - a$ различны.

При $x = 0$ получаем: $x^2 + ax + 1 = 1 \geq 0$ при всех значениях a .

При $x = 1 - a$ получаем: $x^2 + ax + 1 = (1 - a)^2 + a(1 - a) + 1 = 2 - a$.

Это выражение неотрицательно при $a \leq 2$.

При $x = -1 - a$ получаем: $x^2 + ax + 1 = (-1 - a)^2 + a(-1 - a) + 1 = a + 2$.

Это выражение неотрицательно при $a \geq -2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три различных корня при

$$-2 \leq a < -1; \quad -1 < a < 1; \quad 1 < a \leq 2.$$

Ответ: $-2 \leq a < -1; \quad -1 < a < 1; \quad 1 < a \leq 2$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -2$ и/или $a = 2$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-2; 2)$ множества значений a , возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Получены корни уравнения $3x^2 + 2ax + 1 = (x^2 + ax + 1)^2$: $x = 0$, $x = 1 - a$, $x = -1 - a$ и задача верно сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2 + ax + 1 > 0$ ($x^2 + ax + 1 \geq 0$)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 18.5

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x - 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы. Рассмотрим два случая:

1) Если $x - 5y + 5 \geq 0$, то получаем уравнение

$$x^2 + 5x + y^2 - y - x + 5y - 5 = 52;$$

$$x^2 + 4x + y^2 + 4y - 57 = 0;$$

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(-2; -2)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

2) Если $x - 5y + 5 \leq 0$, то получаем уравнение

$$x^2 + 5x + y^2 - y + x - 5y + 5 = 52; \quad x^2 + 6x + y^2 - 6y - 47 = 0; \quad (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(-3; 3)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(-10; -1)$ и $B(5; 2)$, лежащих на прямой $x - 5y + 5 = 0$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B , во втором – дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рисунок).

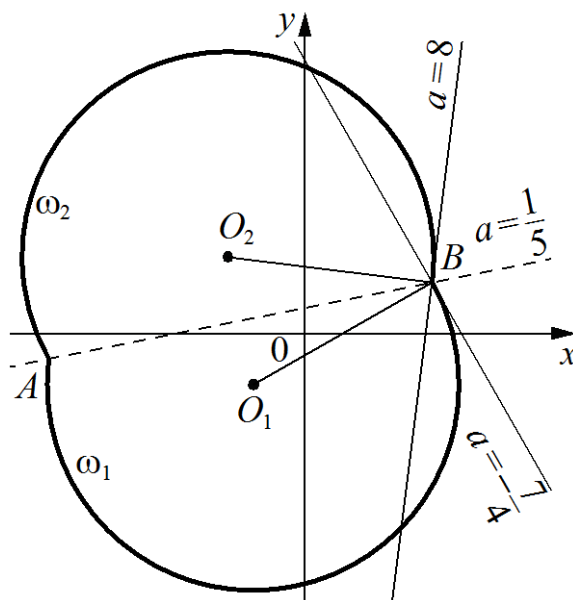
Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m , которая проходит через точку B , и угловой коэффициент которой равен a .

При $a = \frac{1}{5}$ прямая m проходит через точки A и B , то есть исходная система имеет два решения.

При $a = -\frac{7}{4}$ прямая m перпендикулярна прямой O_1B , угловой коэффициент которой равен $\frac{4}{7}$, значит, прямая m касается дуги ω_1 в точке B и пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых – точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a = 8$ прямая m перпендикулярна прямой O_2B , угловой коэффициент которой равен $-\frac{1}{8}$, значит, прямая m касается дуги ω_2 в точке B и пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых – точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a < -\frac{7}{4}$ или $a > 8$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке B и ещё в одной точке, отличной от точки A , то есть исходная система имеет три решения.



При $-\frac{7}{4} < a < \frac{1}{5}$ прямая m пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых – точка B) и не пересекает дугу ω_1 в точках, отличных от точки B , то есть исходная система имеет два решения.

При $\frac{1}{5} < a < 8$ прямая m пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых – точка B) и не пересекает дугу ω_2 в точках, отличных от точки B , то есть исходная система имеет два решения.

Значит, исходная система имеет ровно два решения при $-\frac{7}{4} \leq a \leq 8$.

Ответ: $-\frac{7}{4} \leq a \leq 8$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -\frac{7}{4}$ и/или $a = 8$	3
При всех значениях a верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 18.6

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $|3x| - 2x - 2 - a = 0$, для которых выполнено условие $x^2 - 2x - a \neq 0$.

При $x \leq 0$ уравнение $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ принимает вид $-5x - 2 - a = 0$ и задаёт на плоскости Ox луч l_1 с началом в точке $(0; -2)$. При $x \geq 0$ уравнение $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ принимает вид $x - 2 - a = 0$ и задаёт луч l_2 с началом в точке $(0; -2)$. Значит, уравнение $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ имеет два корня при $a > -2$, имеет один корень при $a = -2$ и не имеет корней при $a < -2$.

Уравнение $x^2 - 2x - a = 0$ задаёт параболу $a = x^2 - 2x$.

Координаты точек пересечения параболы $a = x^2 - 2x$ с лучом l_1 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a = x^2 - 2x, \\ a = -5x - 2, \\ x \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -5x - 2 = x^2 - 2x, \\ a = -5x - 2, \\ x \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)(x+2) = 0, \\ a = -5x - 2, \\ x \leq 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a = x^2 - 2x$ пересекается с лучом l_1 в точках $(-1; 3)$ и $(-2; 8)$.

Координаты точек пересечения параболы $a = x^2 - 2x$ с лучом l_2 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a = x^2 - 2x, \\ a = x - 2, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 = x^2 - 2x, \\ a = x - 2, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-2) = 0, \\ a = x - 2, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a = x^2 - 2x$ пересекается с лучом l_2 в точках $(1; -1)$ и $(2; 0)$.

Следовательно, условие $x^2 - 2x - a \neq 0$ выполнено для корней уравнения $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ при всех a , кроме $a = -1$, $a = 0$, $a = 3$ и $a = 8$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

Ответ: $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точки $a = -2$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = 8$, $a = 3$ и/или $a = -2$, или множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = 0$, $a = -1$ и/или $a = -2$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и лучей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Примеры оценивания решений задания 18

Пример 18.1.1

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(|x-a-1|+|x-a+1|)^2 + a(|x-a-1|+|x-a+1|) + a^2 - 16 = 0$$

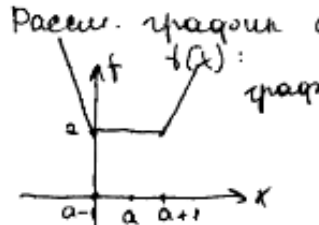
имеет ровно два различных корня.

Ответ: $a = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$; $-1-\sqrt{13} < a < -1+\sqrt{13}$.

$\sqrt{18}$ $(|x-a-1|+|x-a+1|)^2 + a(|x-a-1|+|x-a+1|) + a^2 - 16 = 0$ 2 разн. корня

① $|x-a-1|+|x-a+1|=t$ Замена: $t \geq 0$ $\mathcal{L}(t) = [0; +\infty)$
 $|x-(a+1)|+|x-(a-1)|=t$ $\mathcal{D}(t) = \mathbb{R}$

Рассмотрим ф-цию $t(x)$:
 $t(x) = \begin{cases} x-a-x+a+1, & \text{при } x \geq a+1 \\ -x+a+1+x-a-1, & \text{при } a-1 < x < a+1 \\ -x+a+1-x+a-1, & \text{при } x \leq a-1 \end{cases}$

Рассм. график функции $t(x)$:

 $t(x) = \begin{cases} 2x-2a, & \text{при } x \geq a+1 \\ 2, & \text{при } a-1 < x < a+1 \\ -2x+2a, & \text{при } x \leq a-1 \end{cases}$

Таким образом: при 1) $t < 2$ решений нет
 2) $t = 2$ решений бесконечно много
 3) $t > 2$ 2 реш.

Т.о. чтобы исходное уравнение имело 2 решения, то ур-е относительно t должно иметь либо 1 корень, который > 2
 либо 2 корня, один из которых > 2 а другой < 2

Т.е. $\begin{cases} t > 2 \rightarrow \mathcal{D}(\text{отн. } t) = 0 \\ \begin{cases} t_1 > 2 \\ t_2 < 2 \end{cases} \end{cases}$

уравнение в заменной

② $t^2 + at + a^2 - 16 = 0$ $\mathcal{D} = a^2 - 4(a^2 - 16) = -3a^2 + 64$

1) $\mathcal{D} = 0$: $a = \pm \frac{8}{\sqrt{3}}$; тогда $t = \frac{-a}{2} \Rightarrow$ 1) при $a = \frac{8}{\sqrt{3}}$ $t = -\frac{4}{\sqrt{3}} < 2 \Rightarrow a \neq \frac{8}{\sqrt{3}}$
 2) при $a = -\frac{8}{\sqrt{3}}$ $t = \frac{4}{\sqrt{3}} > 2 \Rightarrow a = -\frac{8}{\sqrt{3}}!$

2) $\mathcal{D} > 0$: $-3a^2 + 64 > 0 \Leftrightarrow |a| < \frac{8}{\sqrt{3}}$

Т.о. $\begin{cases} \begin{cases} t_1 > 2 \\ t_2 < 2 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} t_1 < 2 \\ t_2 > 2 \end{cases} (2) \end{cases}$

$t_1 = \frac{-a + \sqrt{-3a^2 + 64}}{2}$
 $t_2 = \frac{-a - \sqrt{-3a^2 + 64}}{2}$

Пример 18.1.2

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(|x-a-1|+|x-a+1|)^2 + a(|x-a-1|+|x-a+1|) + a^2 - 16 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $a = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$; $-1-\sqrt{13} < a < -1+\sqrt{13}$.

$\sqrt{18}$

$$\lambda \equiv (|x-a-1|+|x-a+1|)$$

Тогда уравнение будет выглядеть так:

$$\lambda^2 + a\lambda + a^2 - 16 = 0$$

$$\lambda^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot \lambda + \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 16 = 0$$

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 - 16 = 0$$

Найдем, чему равен λ на разных промежутках x :

$x \in (-\infty; a-1):$	$x \in [a-1; a+1]:$	$x \in (a+1; +\infty):$
$\lambda = a-x+1 + a-x-1$	$\lambda = a-x+1 + x-a+1$	$\lambda = x-a-1 + x-a+1$
$\lambda = 2a-2x$	$\lambda = 2$	$\lambda = 2x-2a$
$\lambda_{\min} \xrightarrow{x \rightarrow a-1} 2a-2(a-1) = 2$		$\lambda \in \lambda_{\min} \xrightarrow{x \rightarrow a+1} 2(a+1)-2a = 2$
$\lambda_{\max} \rightarrow \infty$		$\lambda_{\max} \rightarrow \infty$
$\lambda \in (2; +\infty)$		$\lambda \in (2; +\infty)$

Заметим, что $E(\lambda)$ (возможные значения λ)

- не зависит от параметра a и $\lambda \in [2; +\infty)$
- принимает одно значение $\lambda \in (2; +\infty)$, можно найти 2 значения x , от которых оно получается, но есть от одного λ - 2 р-ш.

А если $\lambda = 2$, то решений бесконечно

$$\lambda^2 + a\lambda + a^2 - 16 = 0$$

$$D = a^2 - 4a^2 + 64 = 64 - 3a^2$$

$$1) D = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8\sqrt{3}}{3} \\ a = +\frac{8\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Исходя из рассуждений выше можно сказать, что 2 решения будут, если.

$$1) D = 0, \lambda \in (2; +\infty)$$

$$2) D > 0, \lambda_1 \in (-\infty; 2); \lambda_2 \in (2; +\infty)$$

↑ меньш. кор.
(вне $E(1)$)

↑ больш. кор.

$$\lambda = \frac{-a}{2}$$

$$\lambda = \frac{8\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \in (2; +\infty) \text{ или } \lambda = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \notin (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \left(a = -\frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ уг. кор.} \right)$$

$$\lambda = -\frac{4\sqrt{3}}{3} < 2 \Rightarrow a = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ не уг.}$$

$$2) D > 0 \Rightarrow a \in \left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}; \frac{8\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{64 - 3a^2}}{2} < 2 \quad \cap \quad \lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{64 - 3a^2}}{2} > 2$$

$$\sqrt{64 - 3a^2} > -a - 4$$

$$\sqrt{64 - 3a^2} > 4 + a$$

Пример 18.1.3

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(|x-a-1|+|x-a+1|)^2 + a(|x-a-1|+|x-a+1|) + a^2 - 16 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $a = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$; $-1-\sqrt{13} < a < -1+\sqrt{13}$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{18} \\ & (|x-a-1|+|x-a+1|)^2 + a(|x-a-1|+|x-a+1|) + a^2 - 16 = 0 \\ & t = |x-a-1|+|x-a+1| \\ & \text{Рассмотрим } f(x) = |x-a-1|+|x-a+1|: \\ & x \leq (a-1): \quad x \geq (a+1): \\ & f(x) = -2x+2a \quad f(x) = 2x-2a. \\ & x \in [(a-1); (a+1)]: \\ & f(x) = 2 \end{aligned}$$

м.к. при $x \leq (a-1)$ $f(x)$ - монот. убыв.,
а при $x \geq (a+1)$ $f(x)$ - монот. возр. $\Rightarrow f(x) \geq 2$

каждому значению $t \geq 2$ соот. 2 значения x
для $t=2$ соот. либо бесконечное множество значений x , либо 2.
~~ровно 2 значения тогда, когда~~

$$t^2 + at + a^2 - 16 = 0$$

чтобы было 2 решения, надо чтобы было только 1 $t \geq 2$:

$$D = a^2 - 4a^2 + 64 = -3a^2 + 64.$$

$D=0$: 1 решение t

$$64 - 3a^2 = 0$$

$$a = \pm \frac{8}{\sqrt{3}}$$

проверим, что $t \geq 2$:

$$a = -\frac{8}{\sqrt{3}}:$$

$$t = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}} \pm 0}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}} > \frac{4}{\sqrt{9}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}} > 2. \Rightarrow a = -\frac{8}{\sqrt{3}} \text{ подр.}$$

$$a = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$t = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}} \pm 0}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ - не подходит.}$$

2) t - наибольший t подходит, а меньший - нет:

$$\begin{cases} \frac{-a + \sqrt{64-3a^2}}{2} > 2 \\ \frac{-a - \sqrt{64-3a^2}}{2} < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{64-3a^2} > 4+a \\ \sqrt{64-3a^2} > -4-a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 64-3a^2 > 0 \\ 64-3a^2 > a^2+8a+16 \\ 64-3a^2 > a^2+8a+16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^2 \leq 64 \\ 4a^2 + 8a - 48 < 0 \quad | :4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in \left[-\frac{8}{\sqrt{3}}; \frac{8}{\sqrt{3}}\right] \\ a^2 + 2a - 12 < 0 \end{cases}$$

$$D = 4 + 48 = 52$$

$$\frac{22 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 11 \pm \sqrt{13}$$

$$\begin{cases} a \in \left[-\frac{8}{\sqrt{3}}; \frac{8}{\sqrt{3}}\right] \\ a \in (-7 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13}) \end{cases} \Rightarrow a \in (1 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13})$$

$$1 - \sqrt{13} \stackrel{?}{\geq} -\frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$1 - 2\sqrt{13} + 13 \stackrel{?}{\leq} \frac{64}{3}$$

$$-2\sqrt{13} \stackrel{?}{\leq} \frac{64 - 42}{3}$$

$$1 + \sqrt{13} \stackrel{?}{\leq} \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{13} \stackrel{?}{\leq} \frac{22}{3} \quad | \cdot \frac{3}{2}$$

$$6\sqrt{13} \stackrel{?}{\leq} 22$$

$$468 < 484$$

$$a \in (1 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13})$$

объединяем ~~ответ~~ то, что у нас получилось в 1 и 2 случаях:

$$\begin{cases} a \in \left[-\frac{8}{\sqrt{3}}\right] \\ a \in (1 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13}) \end{cases} \quad a \in (1 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13}) \cup \left\{-\frac{8}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$\text{Ответ: } a \in (1 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13}) \cup \left\{-\frac{8}{\sqrt{3}}\right\}$$

..

Комментарий.

Задача верно сведена к исследованию расположения корней квадратного уравнения $y^2 + ay + a^2 - 16 = 0$, где $y = |x - a - 1| + |x - a + 1|$. Неверно решены иррациональные неравенства.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 18.1.4

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(|x-a-1|+|x-a+1|)^2 + a(|x-a-1|+|x-a+1|) + a^2 - 16 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $a = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$; $-1-\sqrt{13} < a < -1+\sqrt{13}$.

$$\sqrt{18}. (|x-a-1|+|x-a+1|)^2 + a(|x-a-1|+|x-a+1|) + a^2 - 16 = 0$$

$$t = |x-a-1|+|x-a+1| \quad \text{нельзя } t=0$$

$$(*) \quad t^2 + at + a^2 - 16 = 0. \quad |x-a-1| = -|x-a+1|$$

$$t \neq 0 \quad \text{нельзя } x \in \mathbb{R}$$

2 разл.
корня.
 $a = ?$

Итак, заменим:

$$t = |x-a-1|+|x-a+1| \Rightarrow t > 0 \quad (\text{н.к. } t \neq 0)$$

$$D_{(*)} = a^2 - 4(a^2 - 16) = a^2 - 4a^2 + 64 = -3a^2 + 64.$$

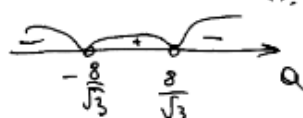
при $D < 0 \rightarrow$ нет корней. $D = 0$ (1 корень).

$$-3a^2 + 64 < 0$$

$$(64 - 3a^2) < 0$$

$$(8 - \sqrt{3}a)(8 + \sqrt{3}a) < 0$$

$$a = \frac{8}{\sqrt{3}} \quad a = -\frac{8}{\sqrt{3}}$$



$a \in (-\infty; -\frac{8}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{8}{\sqrt{3}}; +\infty)$; н.к. при этих a ; $D < 0$, то есть

корней нет $\Rightarrow a \notin (-\infty; -\frac{8}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{8}{\sqrt{3}}; +\infty)$.

(не удовлетв. усл.)

(*) при $a = -\frac{8}{\sqrt{3}}$.

$$\frac{8}{2\sqrt{3}} = |x + \frac{8}{\sqrt{3}} - 1| + |x + \frac{8}{\sqrt{3}} + 1|$$

$$\frac{8}{2\sqrt{3}} = \left| \frac{\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right| + \left| \frac{\sqrt{3}x + 8 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right| \Rightarrow 4 = |\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3}| + |\sqrt{3}x + 8 + \sqrt{3}|$$

√13 (не подходит)

$$4 \neq 16 = \left(|\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3}| + |x\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3}| \right)^2$$

$$16 = \left(\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3} \right)^2 + 2 \left(\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3} \right) \left(x\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3} \right) + \left(x\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3} \right)^2$$

$$16 = \left(\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3} \right) \left(\sqrt{3}x + 8 + \sqrt{3} \right)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \left(\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3} \right)^2 &= \left(\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3} \right) \left(\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3} \right) = 3x^2 + 8\sqrt{3}x - 3x^2 - 8\sqrt{3}x + 64 - 8\sqrt{3} - \sqrt{3}x - 8\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{3}x - 3x^2 + 64 - 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$4 = \left| 3\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3} \right| + \left| x\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3} \right|$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}-8}{\sqrt{3}} \quad x_2 = \frac{-8-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x_1 > x_2$$

$$4 = \left| x\sqrt{3} + 8 - \sqrt{3} \right| + \left| x\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3} \right|$$

$$g(x) = 4 \quad f(x) = \left| x\sqrt{3} + 8 - \sqrt{3} \right| + \left| x\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3} \right|$$

① "значение корня"

$$\Downarrow a = -\frac{8}{\sqrt{3}} - \text{не подходит}$$

тогда основное уравнение
будет при ① = - (раскрываем)

или

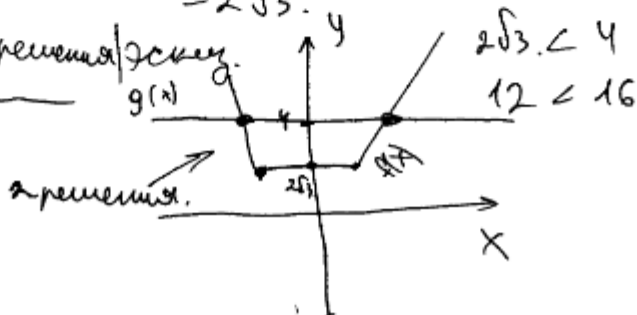
$$f(x) =$$

$$f(x) = x\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3} + x\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}x + 16 + 2\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

$$-\frac{8}{\sqrt{3}} < 0$$

$$\text{при } a = -\frac{8}{\sqrt{3}} \text{ — 2 переменных}$$



√18 (предположение)

$$D > 0; a \in \left(-\frac{8}{\sqrt{3}}; \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$$

↑
2 корня.

t > 0 ⇒ Опр. замени.

$$t_1 = |x - a - 1| + |x - a + 1| \quad t_2 = |x - a - 1| + |x - a + 1|$$

Но если оба корня t_1 и t_2 — удов. всем условиям ⇒ получится более 2-х корней. тогда рассм. случай когда 1 корень удов. $t > 0$; а второй нет.

$$D = -3a^2 + 64 > 0$$

$$t_1 = \frac{-a - \sqrt{64 - 3a^2}}{2} \quad t_2 = \frac{-a + \sqrt{64 - 3a^2}}{2}$$

$$4 < \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$16 < \frac{64}{3}$$

$$48 < 64$$

Пусть $t_1 > 0$. $t_2 < 0$

$$-a - \sqrt{64 - 3a^2} > 0 \quad -a + \sqrt{64 - 3a^2} < 0$$

$$a < -\sqrt{64 - 3a^2}$$

$$-a > \sqrt{64 - 3a^2}$$

$$a < -\sqrt{64 - 3a^2}$$

$$-a > \sqrt{64 - 3a^2}$$

$$a < 0$$

$$a > \sqrt{64 - 3a^2}$$

$$a^2 > 64 - 3a^2$$

$$4a^2 > 64$$

$$a^2 > 16$$

$$a^2 > 16$$

$$a > 0$$

$$a \in (4; +\infty)$$

$$c. y. D > 0$$

$$a \in \left(4; \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$$

$$a \in (-\infty; -\sqrt{16}) \cup (\sqrt{16}; +\infty)$$

$$a \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$$

✓18 (продолжение).

$$a = -\frac{8}{\sqrt{3}}; a \in (4; \frac{8}{\sqrt{3}})$$

Ответ:

$$a \in [-4; 4] \cup (-4; \frac{8}{\sqrt{3}})$$

при $a = 4$.

$$(|x-5| + |x-3|)^2$$

$$t^2 + at + a^2 - 16 = 0$$

$$t^2 + 4t = 0$$

$$t = 0; t = -4. \rightarrow \text{не удов.}$$

при $a = -4$.

$$t^2 - 4t = 0$$

$$t = 4; t = 0.$$

$$\text{Ответ: } a \in [4; \frac{8}{\sqrt{3}}) \cup \{-\frac{8}{\sqrt{3}}\}.$$

$$t_1 < 0; t_2 > 0$$

$$-a + \frac{\sqrt{64-3a^2}}{2} > 0$$

$$-a + \sqrt{64-3a^2} > 0$$

$$a < \sqrt{64-3a^2}$$

$$a > 0$$

$$a^2 < 64-3a^2$$

$$4a^2 < 16$$

$$a \in (-4; 4)$$

$$a \in$$

$$a = -\frac{8}{\sqrt{3}}; a = 4$$

$$a$$

Комментарий.

Задача не сведена к исследованию расположения корней квадратного уравнения $y^2 + ay + a^2 - 16 = 0$, где $y = |x-a-1| + |x-a+1|$.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 18.2.1

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x - a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $-5 < a < -4$; $-4 < a < -3$.

№18

a - ? Система имеет ровно 4 реш.

$$\begin{cases} y = |x - a| - 4 & (1) \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 & (2) \end{cases}$$

Решение:

1) Рассм. (1): $y = |x - a| - 4$ - графика модуля с $k=1$ и вершинами вверх, вершина в т. $(a; -4)$

2) Рассм. (2): $|y| = -\frac{1}{4}x^2 - 2x$ - парабола $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x$ на $y \geq 0$, симметрично отраженная на $y \leq 0$.

Рассм. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x$ - парабола, ветви вниз, $x_1 = -\frac{2}{-\frac{1}{2}} = 4$, $y_1 = f(x_1) = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 8 = -4 + 8 = 4$.

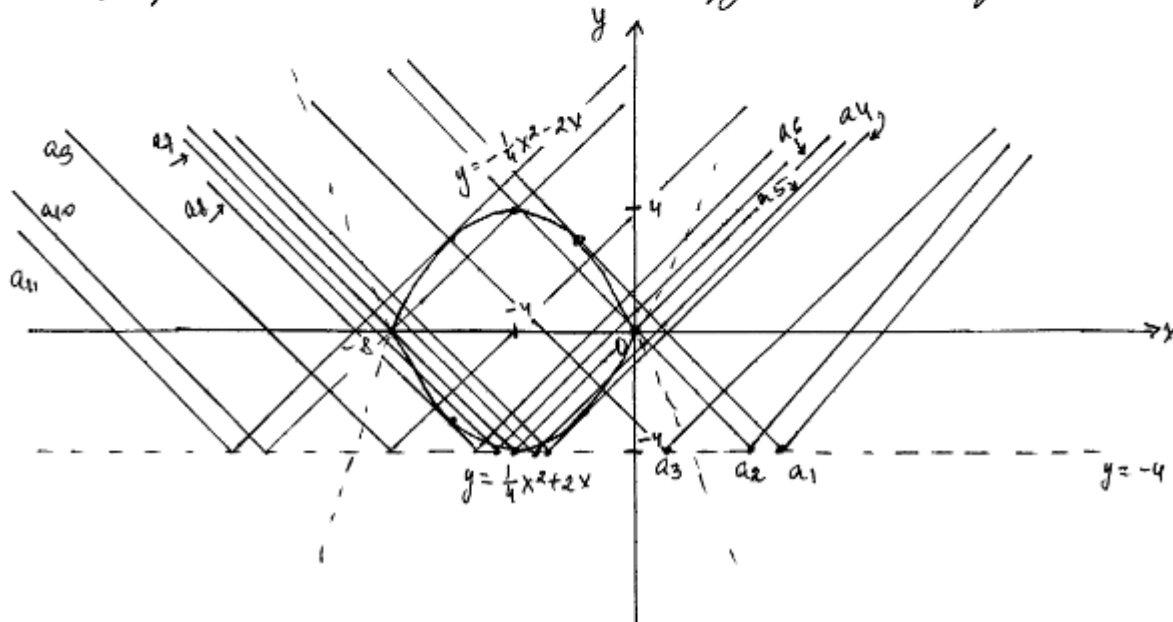
Пересекать Ox в точках $(0; 0)$ и $(-8; 0)$ т.н.:

$$-\frac{1}{4}x^2 - 2x = 0 \quad | \cdot (-4)$$

$$x^2 + 8x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$$

3) Изобразим систему (1) на коор. м-м xOy :



Рассматривая различные значения параметра a , получаем следующее:

- если $a > a_1$, то 0 решений, где a_1 - касание правой ветви (1) и верхней параболы (2) ~~при $a > a_1$~~
- если $a = a_1$, то 1 решение
- если $a \in (a_4; a_1)$, то 2 решения, где a_4 - касание правой ветви (1) и нижней параболы (2) ~~при $a < a_1$~~
- если $a = a_4$, то 3 решения
- если $a \in (a_6; a_4)$, то 4 решения, где a_6 - (1) проходит $\frac{7}{3}(0;0)$ и $(-8;0)$
- если $a = a_6$, то 3 решения
- если $a \in (a_8; a_6)$, то 4 решения, где a_8 - касание левой ветви (1) с нижней параболой (2) ~~при $a < a_6$~~
- если $a \in (a_{11}; a_8)$, то 2 решения, где a_{11} - касание правой ветви (1) и верхней параболы (2) ~~при $a < a_8$~~
- если $a = a_{11}$, то 1 решение
- если $a < a_{11}$, то 0 решений.

4) Приведем к виду, что удобно решать. $a \in (a_6; a_4)$ и $a \in (a_8; a_6)$.

а) Найдем a_6 : (1) проходит $\frac{7}{3}(0;0)$ и $(-8;0)$, правой ветви $\frac{7}{3}(0;0)$, левой $\frac{7}{3}(-8;0)$. Тогда:

$$0 = 0 - a - 4, \text{ т.е. } a = -4.$$

б) Найдем a_4 :

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x = x - a - 4 \quad | \cdot 4$$

$$x^2 + 8x - 4x - 4a - 16$$

$$x^2 + 4x + 4a + 16 = 0 \quad (*)$$

т.е. a_4 - касание, но ур-ие (*) должно иметь 1 р-е.

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 4a - 16 = 4 - 4a - 16 = -4a - 12.$$

$$\frac{D}{4} = 0: -4a - 12 = 0, \text{ т.е. } a = -3.$$

в) Найдем a_8 : $\frac{1}{4}x^2 + 2x = -x + a - 4 \quad | \cdot 4$

$$x^2 + 8x = -4x + 4a - 16$$

$$x^2 + 12x - 4a + 16 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 6^2 + 4a - 16 = 36 + 4a - 16 = 20 + 4a$$

т.е. a_8 - ситуация касания, то $\frac{D}{4} = 0: 20 + 4a = 0$

$$a = -5$$

5) Ищем образцы, удобно решать. $a \in (-5; -4) \cup (-4; -3)$.

Ответ: $(-5; -4) \cup (-4; -3)$.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 18.2.2

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x - a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $-5 < a < -4$; $-4 < a < -3$.

18) $\begin{cases} y = |x - a| - 4 \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$ (1)

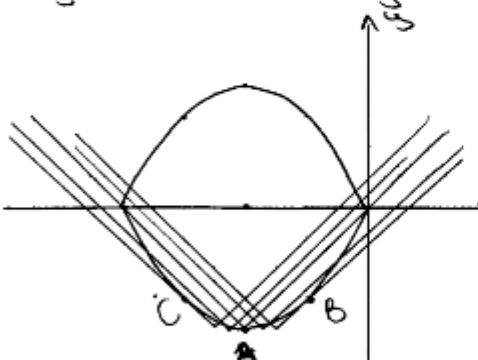
(1) $\begin{cases} y > 0 \\ 4y + x^2 + 8x + 16 - 16 = 0 \\ y = 4 - \frac{1}{4}(x+4)^2 \\ y > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y < 0 \\ -4y + x^2 + 8x + 16 - 16 = 0 \\ y < 0 \\ y = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y = |x - a| - 4 \\ y > 0 \\ y = 4 - \frac{1}{4}(x+4)^2 \\ y < 0 \\ y = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4 \end{cases}$

Построим график $Gr(y = 4 - \frac{1}{4}(x+4)^2)$ - пар-ла, ветви вниз, вершина в точке $O(4; 4)$ и проход через точки $(0, 0)$ и $(-8, 0)$
 $y > 0$ - область выше прямой $y = 0$, а $y < 0$ - область ниже $y = 0$

Построим $Gr(y = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4)$ - пар-ла, ветви вверх, вершина в точке $(-4; -4)$ и проход через точки $(0, 0)$ и $(-8, 0)$

4. $Gr(y = |x - a| - 4)$ - сим-н относительно $x = a$ образован из $Gr(y = |x|)$ со сдвигом вниз на 4 и сдвигом на a



Найдем точки пересечения графиков:

$Gr(y = |x - a| - 4), Gr(y = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4), x = -4$

$$\begin{cases} y = |x - a| - 4 \\ y = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \\ 1 - 4 - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \\ a = -4 \end{cases}$$

точка касания $Gr(y = |x - a| - 4)$ и $Gr(y = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4)$

$$\begin{cases} |x - a| - 4 = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4 \\ x \geq a \\ 1 = \frac{1}{4}x + a \\ x < a \\ -1 = \frac{1}{4}x + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x = -2 \\ a = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < a \\ x = -6 \\ a = -5 \end{cases}$$

Исходя из графика, видно, что в (1) A сис-ма имеет 3 р-ш, в (1) B и (1) C - 3 р-ш. В промежутках между (1) A и (1) C и (1) A, (1) B сис-ма имеет 4 р-ш. В промежутках между (1) C и правее (1) B сис-ма имеет 2 или менее р-ш.

По условию необходимо найти значения a , при кот. сис-ма будет иметь 4 различных решения, тогда $a \in (-5; -4) \cup (-4; -3)$

Ответ: $(-5; -4) \cup (-4; -3)$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 18.2.3

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x - a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $-5 < a < -4$; $-4 < a < -3$.

$$\begin{cases} y = |x - a| - 4 & (1) \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{N 18}$$

Построим график выражения (2).

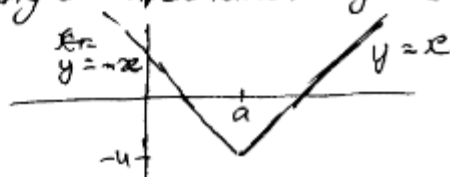
$$|y| = \frac{-x^2 - 8x}{4} = -\frac{x(x+8)}{4}$$

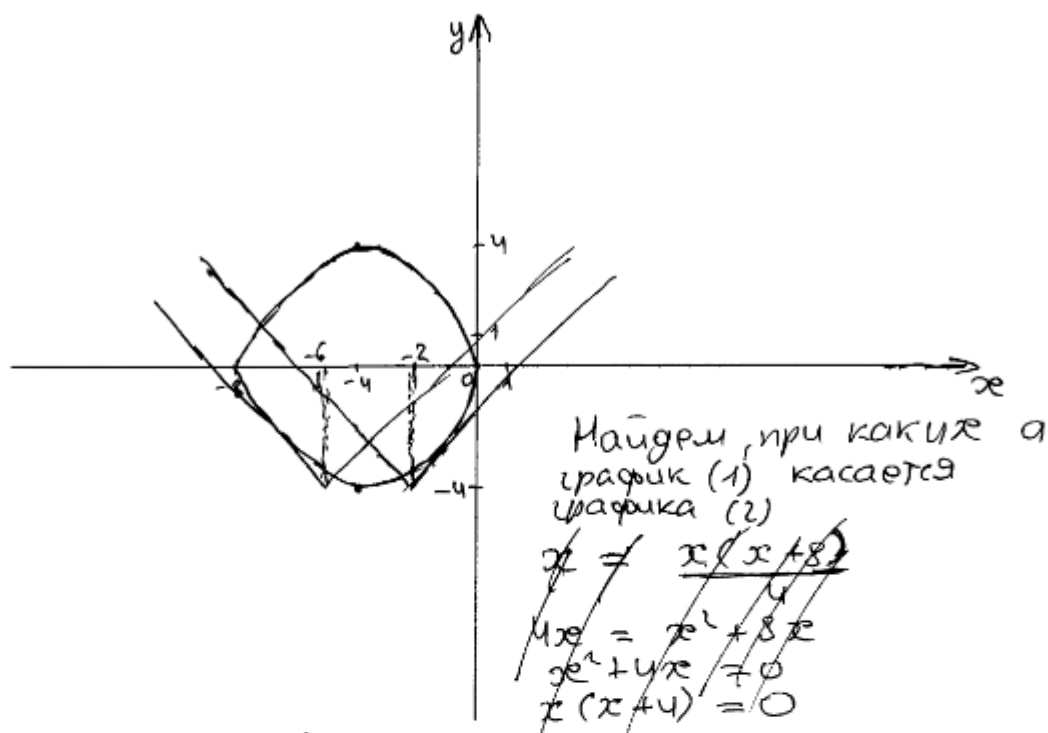
1. $y > 0$: $y = -\frac{x(x+8)}{4}$ $x_0 = -4$; $y_0 = 4$; ветви вниз

2. $y < 0$: $y = \frac{x(x+8)}{4}$ $x_0 = -4$; $y_0 = -4$; ветви вверх

Корни $x = 0$ и $x = -8$.

График (1) представляет из себя "заложку", образованную прямыми $y = x$ и $y = -x$





$$y = \frac{1}{4}x^2 + 2x$$

$$y' = \frac{1}{2}x + 2 = 1$$

$$x_0 = -2$$

$$y(x_0) = \frac{1}{4} \cdot 4 - 4 = -3$$

$$x - (a+4) = -3$$

$$x - a - 4 = -3$$

$$-2 - a - 4 = -3$$

$$-a = 3$$

$$a = -3$$

$$\frac{1}{2}x + 2 = -1$$

$$\frac{1}{2}x = -3$$

$$x = -6$$

$$y(x_0) = \frac{1}{4} \cdot 36 - 12 = 9 - 12 = -3$$

$$y = -x + (a-4) = -3$$

$$6 + (a-4) = -3$$

$$a + 2 = -3$$

$$a = -5$$

$a = -3$ и при $a = -5$ — 3 решения —
~~от $a < -5$ либо 2, либо 0 решений~~
~~от $a > -3$ либо 2, либо 0 решений~~

Ответ: $a \in (-5; -3)$

Комментарий.

С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-5; -3)$ множества значений a .

Оценка эксперта: 2 балла.

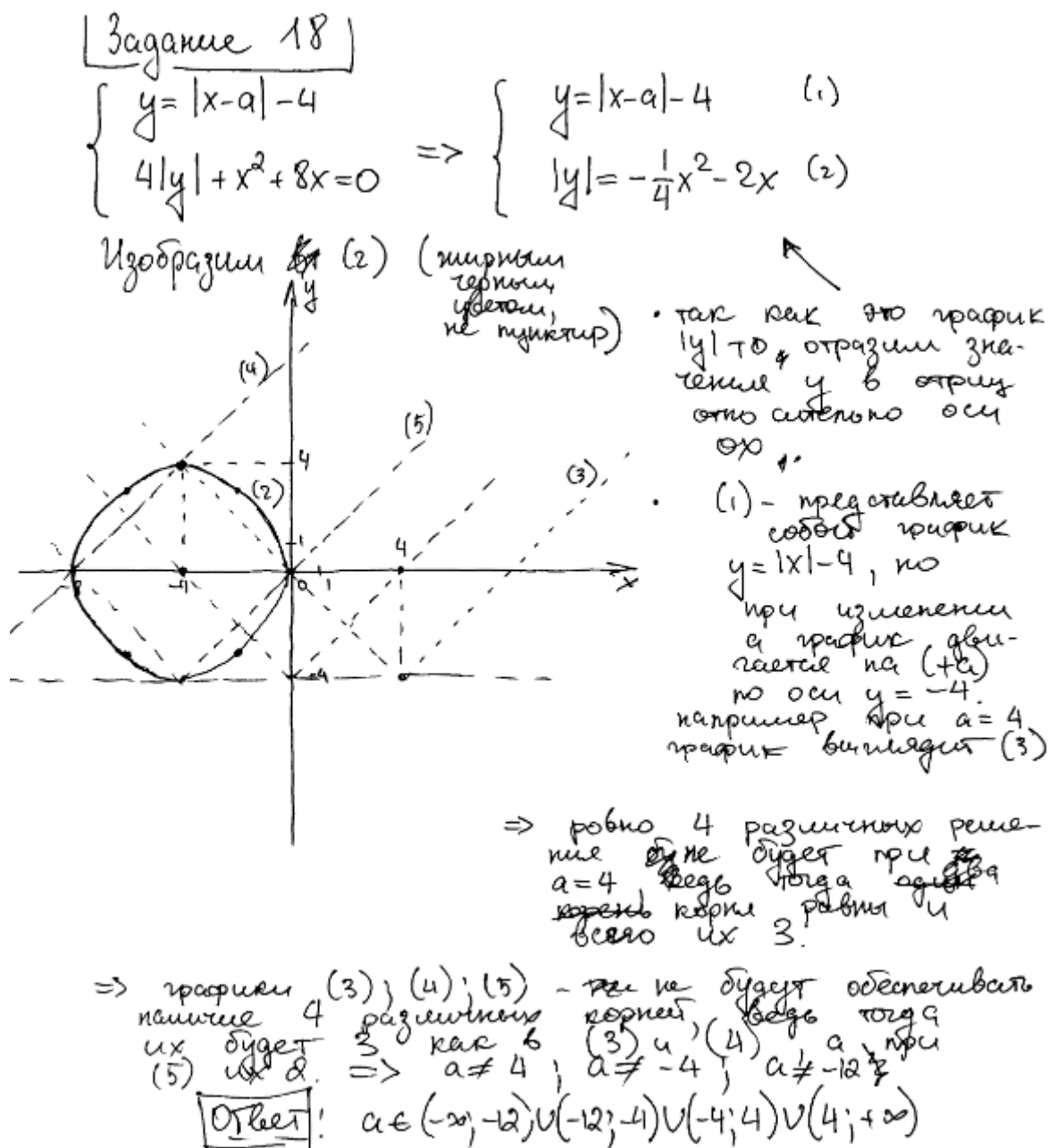
Пример 18.2.4

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x - a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $-5 < a < -4$; $-4 < a < -3$.



Комментарий.

Задача не сведена к исследованию взаимного расположения дуг парабол и лучей (аналитически или графически)

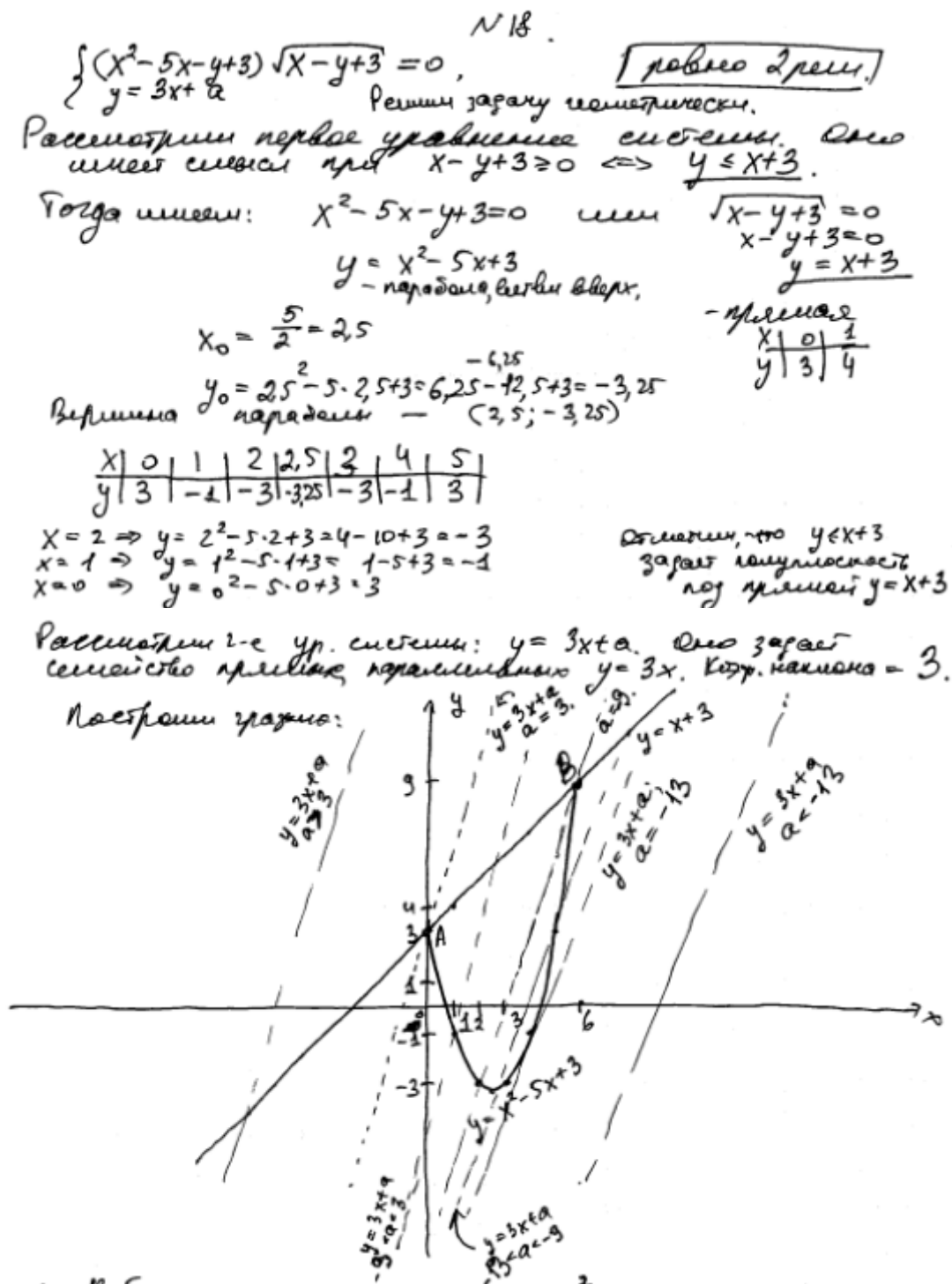
Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 18.3.1

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases} \text{ имеет ровно два различных решения.}$$

Ответ: $a = -13$; $-9 \leq a < 3$.



1) Найдем коэф. пересечения $y = x^2 - 5x + 3$ и $y = x + 3$:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 3 &= x + 3 \\ x^2 - 6x &= 0 \\ x(x - 6) &= 0 \\ x = 0 \text{ или } x &= 6 \end{aligned}$$

Пусть:
 при $x=0$, $y = 0+3=3$ $A(0;3)$
 при $x=6$, $y = 6+3=9$ $B(6;9)$

2) Найдем, при каком a график $y = 3x + a$ пройдет через т. A : $(0;3)$:

$$3 = 3 \cdot 0 + a \rightarrow a = 3$$

3) Найдем, при каком a график $y = 3x + a$ пройдет чпу т. $B(6;9)$:

$$9 = 3 \cdot 6 + a \rightarrow a = -9$$

4) Найдем, при каком a график $y = 3x + a$ будет касательной к параболе $y = x^2 - 5x + 3$

$$\begin{aligned} 3x + a &= x^2 - 5x + 3 \\ x^2 - 8x + (3 - a) &= 0 \\ D &= 64 - 4(3 - a) = 64 - 12 + 4a = 52 + 4a \end{aligned}$$

Т.к. $y = 3x + a$ касается параболы, то пересечение равно в 1 точке $\Rightarrow D = 0$

$$\begin{aligned} 52 + 4a &= 0 \rightarrow 4a = -52 \\ a &= -13 \end{aligned}$$

Рассмотрим, сколько корней имеет уравнен. системы в зависимости от a :

$$\begin{aligned} a < -13 &\rightarrow 1 \text{ к. (пересек. } y = x + 3) \\ a = -13 &\rightarrow 2 \text{ к. (пересек. } y = x + 3 \text{ и касан. } y = x^2 - 5x + 3) \\ -13 < a < -9 &\rightarrow 3 \text{ к. (пересек. } y = x + 3 \text{ и 2 пересек. с } y = x^2 - 5x + 3) \\ a = -9 &\rightarrow 2 \text{ к. (пересек. } y = x + 3 \text{ и 2 пересек. с } y = x^2 - 5x + 3, \\ &\text{но 2 из них совпадают в т. A)} \\ -9 < a < 3 &\rightarrow 2 \text{ к. (пересек. с } y = x + 3 \text{ и 1 пересек. с } y = x^2 - 5x + 3) \\ a = 3 &\rightarrow 1 \text{ к. (пересек. с } y = x + 3 \text{ и 1 пересек. с } y = x^2 - 5x + 3, \\ &\text{но совпадают в т. B)} \\ a > 3 &\rightarrow 1 \text{ к. (пересек. с } y = x + 3). \end{aligned}$$

Система имеет ровно 2 р-на, при $a \in \{-13\} \cup [-9; 3)$.

Ответ: $a \in \{-13\} \cup [-9; 3)$.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 18.3.2

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases} \text{ имеет ровно два различных решения.}$$

Ответ: $a = -13$; $-9 \leq a < 3$.

N 18

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \sqrt{x - y + 3} = 0 \\ y = 3x + a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (*) \quad & \sqrt{x - y + 3} \geq 0 \\ & x - y + 3 \geq 0 \\ & y \leq x + 3 \end{aligned}$$

1) $\begin{cases} x^2 - 5x - y + 3 = 0 \\ \sqrt{x - y + 3} = 0 \\ y = 3x + a \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3 \\ x - y + 3 = 0 \\ y = 3x + a \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 - 5x + 3 & ① \\ y = x + 3 & ② \\ y = 3x + a & ③ \end{cases}$

2) построим график согласно заданной системе:

① $y = x^2 - 5x + 3$
 $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} = 2,5$
 $y_0 = 2,5^2 - 5 \cdot 2,5 + 3 = 6,25 - 12,5 + 3 = -3,25$
 $\downarrow$
 $a > 0 \Rightarrow$ это график параболы с ветвями, направленными вверх

② $y = x + 3$
 - линейная функция

3) нам подходят все значения x и y , лежащие ниже $y = x + 3$ по (*).

4) построим график ③ и определим значения a .

I в точке касания ① и ③ система имеет 2 решения; т.к. графики касаются в одной точке, то их производные равны

$$\begin{aligned} y &= 3x + a & y &= x^2 - 5x + 3 \\ y' &= 3 & y' &= 2x - 5 \\ 3 &= 2x - 5 & \Rightarrow x &= 4 \\ y &= x^2 - 5x + 3 = 4^2 - 5 \cdot 4 + 3 = -1 \\ a &= y - 3x = -1 - 3 \cdot 4 = -13 \end{aligned}$$

II в точке пересечения ① и ② система имеет 2 решения, их значения равны

$$\begin{aligned} y &= x + 3 & y &= x^2 - 5x + 3 \\ x + 3 &= x^2 - 5x + 3 \\ x^2 - 6x &= 0 \\ x(x - 6) &= 0 & \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & y = x + 3 = 0 + 3 = 3 \\ x = 6 & y = x + 3 = 6 + 3 = 9 \end{cases} \end{aligned}$$

$a = y - 3x \quad a_1 = 3 - 0 = 3$
 $a_2 = 9 - 3 \cdot 6 = -9$

Ответ: $a \in \{-13\} \cup [-9; 3)$; при дальнейшем перемещении $y = 3x + a$ влево система имеет 1 решение.

Комментарий.

Решение не является обоснованным, но получен промежуток $[-9; 3)$.

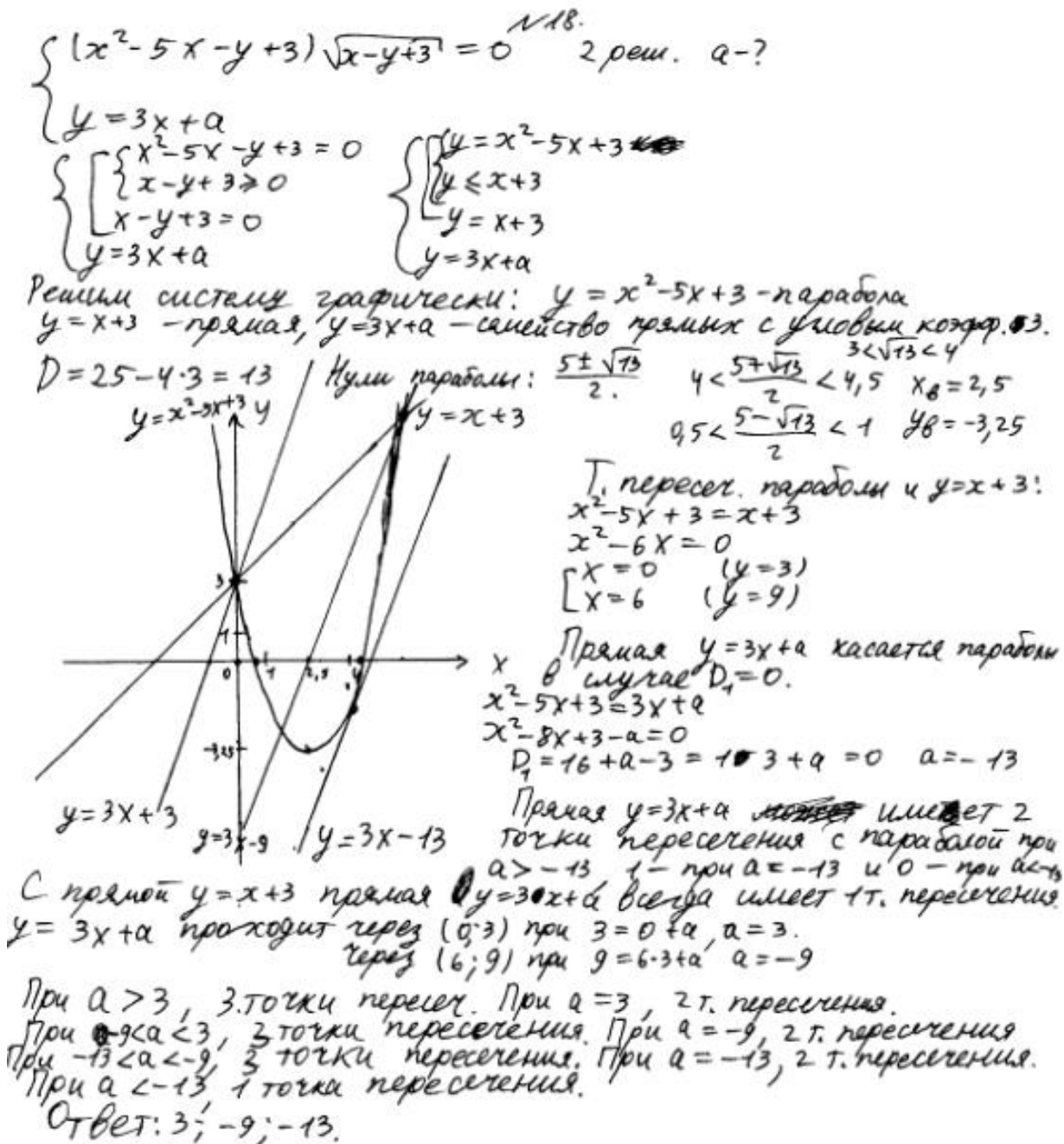
Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 18.3.3

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases} \text{ имеет ровно два различных решения.}$$

Ответ: $a = -13$; $-9 \leq a < 3$.



Комментарий.

Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически).

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 18.4.1

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1} = x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2 \leq a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \leq 2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2+2ax+1} &= x^2+ax+1 \Leftrightarrow \sqrt{3\left(x^2+\frac{2a}{3}x+\frac{1}{3}\right)} = x^2+\frac{a}{2}x+1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+1-\frac{a^2}{3}} &= \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+1-\frac{a^2}{4}; \text{ пусть } t(x) = \sqrt{3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+1-\frac{a^2}{3}}; \\ f(x) &= \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+1-\frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1 \geq 0 \\ 3x^2+2ax+1 = (x^2+ax+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1 \geq 0 \\ 3x^2+2ax+1 = x^4+2ax^3+(x^2+2a^2)+2ax+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1 \geq 0 \\ x^2/(x^2+2ax+2+a^2-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1 \geq 0 \\ x^2/(x^2+2ax+a^2-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1 \geq 0 \\ \begin{cases} x=0 \\ x^2+2ax+a^2-1=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+2ax+a^2-1=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Для того чтобы система имела 3 различных решения, необходимо, чтобы (1) имело 2 ^{различных} решения не равных 0 и удовлетворяло (2), пусть $g(x) = x^2+2ax+a^2-1$, $f(x) = x^2+ax+1$; $f' \neq 0 \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow a^2-1=0 \Rightarrow a=1$ и $a=-1$ не подходит.

Заметим, что (1) $\Leftrightarrow x^2+2ax+a^2-1=0 \Leftrightarrow (x+a)^2-1=0 \Leftrightarrow (x+a-1)(x+a+1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-a \\ x=-1-a \end{cases}; \text{ тогда } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+ax+1 \geq 0 \\ x=1-a \\ x=-1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1-2a+a^2+a-a^2+1 \geq 0 \\ x=1-a \\ 1+2a+a^2-a-a^2+1 \geq 0 \\ x=-1-a \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$ три различных решения системы имеет тогда

(3) $\begin{cases} a \geq -2 \\ x=1-a \end{cases}$ (4) $\begin{cases} a \leq 2 \\ x=-1-a \end{cases}$ (3) и (4) имеют различные, не равные нулю решения; поэтому найдём, при каких a существуют корни 3 и 4:

$1-a = -1-a \Leftrightarrow 1 = -1 \Rightarrow$ таких a не существует. (3) имеет реш. равное 0 при $a = -1$ - не подходит, (4) имеет реш. = 0 при $a = 1$ - не подходит.

(3) имеет реш. при $a \geq -2$; (4) имеет реш. при $a \leq 2 \Rightarrow$ (3) и (4) имеют различные реш., отлич. от 0 при $a \in [-2; 2]$ и $a \neq \pm 1$

Ответ: $a \in [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 18.4.2

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1} = x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2 \leq a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \leq 2$.

$\sqrt{3x^2+2ax+1} = x^2+ax+1$

Значения a , при которых уравнение имеет ровно три различных корня

Варианты ситуации:

- (1) имеет 2 корня
- (2) имеет 1 корень
- (1) имеет 1 корень
- (2) имеет 2 корня

Решение:

1. $x^2+ax+1 < 0$ нет решений

2. $x^2+ax+1 = 0$ (1) тогда $3x^2+2ax+1 = 0$ (2)

(1) $x^2+ax+1 = 0$
 $D > 0 \Rightarrow a^2 - 4 > 0 \Rightarrow (a-2)(a+2) > 0$
 $a < -2$ или $a > 2$

(2) $3x^2+2ax+1 = 0$
 $D/4 = a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$

или $a = \pm\sqrt{3}$ и в (1) не $> 0 \Rightarrow a \neq \pm\sqrt{3}$

3. $x^2+ax+1 > 0$
 $3x^2+2ax+1 = x^2+ax+1 + 2x^2+ax \Rightarrow x^2+ax+1 = 0$
 $a = \pm 2$

или $a = \pm 2$ проверим

при $a = -2$
 $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{-2 \pm 1}{3}$
 $x_1 = -1, x_2 = -1/3$
 $x_3 = 1$

при $a = 2$
 $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{2 \pm 1}{3}$
 $x_1 = 1, x_2 = 1/3$
 $x_3 = 1$

Итого: $-2 \leq a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \leq 2$

уравнение
 ③ $x^4 + a^2 x^2 = x^2 + 2ax + 1 = 0$ равно вычитается
 $x^2/x^2 + a^2 - 1 + 2ax = 0$ пер-во о звёздочкой
 $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$
 равно имеем 2 различные решения
 $D_4 = a^2 - (a^2 - 1) > 0$
 $a^2 - a^2 + 1 > 0$
 $1 > 0$ верно для любого a
 $x_{1,2} = \frac{-a \pm 1}{1}$
 $x_1 = -a + 1$ $x_2 = -a - 1$
 $x_1 \neq x_2$ $-a + 1 \neq -a - 1$
 $1 \neq -1$ верно для любого a
 x_1/x_3
 $-a + 1 \neq 0$ $-a - 1 \neq 0$
 $[a \neq 1]$ $[a \neq -1]$
 (*) $x_1 = -a + 1$ решение вычитается
 $(-a+1)^2 + a(-a+1) + 1 > 0$ (и при x_1)
 $(-a-1)^2 + a(-a-1) + 1 > 0$ (и при x_2)
 $(1-a)^2 - a^2 + a + 1 > 0$
 $1 - 2a + a^2 - a^2 + a + 1 > 0$
 $2 - a > 0$
 $a < 2$
 $(a+1)^2 - a^2 - a + 1 > 0$
 $a^2 + 2a + 1 - a^2 - a + 1 > 0$
 $a + 2 > 0$
 $a > -2$
 Значения a для которых имеем a :
 $a \in (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2)$
 Ответ: $(-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2)$



Комментарий.

В решении присутствуют все этапы. Решение соответствует критерию на 3 балла: с помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением точек $a = -2$ и/или $a = 2$.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 18.4.3

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$ имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2 \leq a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \leq 2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 + 2ax + 1} &= x^2 + ax + 1 \\ \begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 2ax + 1 = x^4 + a^2x^2 + 1 + 2x^2 + 2ax^3 + 2ax \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^4 + a^2x^2 - x^2 + 2ax^3 + 2ax = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^2(x^2 + a^2 - 1 + 2ax) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + ax + 1 \geq 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнение имеет решение, когда $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ имеет 2 корня и они удовлетворяют неравенству $x^2 + ax + 1 \geq 0$.

$$\begin{aligned} x^2 + 2ax + a^2 - 1 &= 0 \\ (x + a)^2 - 1 &= 0 \\ (x + a - 1)(x + a + 1) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = -a + 1 \\ x = -a - 1 \end{cases} \text{ Подставим } x \text{ в } x^2 + ax + 1 \geq 0.$$

$$\begin{aligned} 1) (-a+1)^2 + a(-a+1) + 1 &\geq 0 & 2) (-a-1)^2 + a(-a-1) + 1 &\geq 0 \\ a^2 - 2a + 1 - a^2 + a + 1 &\geq 0 & a^2 + 2a + 1 - a^2 - a + 1 &\geq 0 \\ -a + 2 &\geq 0 & a + 2 &\geq 0 \\ a &\leq 2 & a &\geq -2 \end{aligned}$$

$$a \in [-1, 2]. \quad a \geq -1.$$

Найдем значения x , когда они совпадают;

Значение

$$\begin{aligned} 1) -a+1 &= -a-1 & 1) \text{ - не решай} \\ 2) 0 &= -a+1 & 2) a = 1 \\ 3) 0 &= -a-1 & 3) a = -1 \end{aligned}$$

$\} - \text{выписываем эти точки}$

$$a \in (-1, 1) \cup (1, 2].$$

или $a \in$

Ответ: $(-1, 1) \cup (1, 2]$. Уравнение имеет 3 разл. корня.

Комментарий.

Решение логично, все шаги присутствуют, но при решении неравенства в пункте 2 допущена ошибка вычислительного характера, что соответствует критерию на 2 балла.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 18.4.4

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1} = x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

Ответ: $-2 \leq a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \leq 2$.

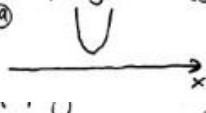
$\sqrt{3x^2+2ax+1} = x^2+ax+1$ (1); a -? ур-е имеет 3 различных корня

1) ОДЗ: $x^2+ax+1 \geq 0$

$x^2+ax+1=0$; $x^2+ax+1 \geq 0$, если $D \leq 0$, так как тогда парабола будет располагаться так, как на рисунках (а) или (б)

$D = a^2 - 4$

ветви направлены вверх, так как коэф. при x^2 равен 1 > 0

(а)  (б) 

$D \leq 0 \Rightarrow a^2 - 4 \leq 0$; $(a-2)(a+2) \leq 0$

$\Rightarrow a \in [-2; 2]$ (*)

2) ~~при~~ при $a \in [-2; 2]$ возведем обе части уравнения в квадрат, тогда

$3x^2+2ax+1 = (x^2+ax+1)^2$

$3x^2+2ax+1 = (x^2+ax)^2 + 2(x^2+ax) + 1$

$3x^2+2ax+1 = x^4+2ax^3+a^2x^2+2x^2+2ax+1$

$x^4+2ax^3+(a^2+2-3)x^2=0$

$x^2 \cdot (x^2+2ax+a^2-1) = 0$

$\begin{cases} x=0 \\ x^2+2ax+a^2-1=0 \end{cases}$ Чтобы уравнение имело ровно 3 различных корня нужно, чтобы $x^2+2ax+a^2-1=0$ имело ровно 2 корня, отличные от нуля

$x^2+2ax+a^2-1=0$ (**)

$\frac{D}{4} = a^2 - a^2 + 1 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = -a \pm 1$

$x_1 \neq x_2$, т.к. $-a+1 \neq -a-1 \Rightarrow 1 \neq -1$ - верно

$\Rightarrow$ уравнение (**) имеет 2 различных корня при $\forall a$ из ОДЗ

$\Rightarrow$ уравнение (1) имеет 3 различных корня при $\forall a$ из ОДЗ, то есть $a \in [-2; 2]$

Ответ: $a \in [-2; 2]$

Комментарий.

Получены корни уравнения $x=0$, $x=1-a$, $x=-1-a$ и задача сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2+ax+1 \geq 0$ (есть только указание).

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 18.5.1

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x + 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

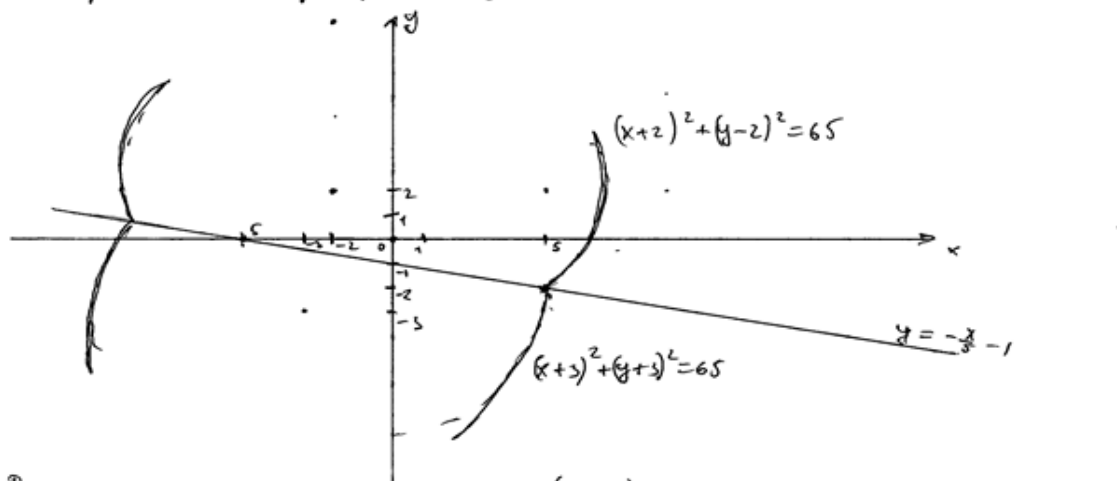
Ответ: $-8 \leq a \leq \frac{7}{4}$.

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y - |x + 5y + 5| = 52 \\ y + 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая при $x + 5y + 5 \geq 0$ и при $x + 5y + 5 < 0$

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y - x - 5y - 5 = 52 \\ x + 5y + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + y^2 + y + x + 5y + 5 = 52 \\ x + 5y + 5 < 0 \end{cases}$$

Построим эскизы графиков.



Рассмотрим $y + 2 = a(x - 5)$.

$y = a(x - 5) - 2$ - графиком ф-ии является множество прямых, проходящих через точку $(5; -2)$. Тогда, где касание окр. $\text{окр.}(\{-5; -3\}; \sqrt{65})$ "а" должно быть равно -8 , а где касание окр. $\text{окр.}(\{-2; 2\}; \sqrt{65})$ "а" должно быть равно $\frac{7}{4}$.

при $a \in [-8; \frac{7}{4}]$ сис-ма имеет 2 корня.

при $a \in (-\infty; -8) \cup (\frac{7}{4}; +\infty)$ сис-ма имеет 3 корня.

Ответ: $a \in [-8; \frac{7}{4}]$.

Комментарий.

Решение и ответ верные, хотя нет обоснования, почему для касания a «а должно быть равно -8 » или «...7/4».

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 18.5.2

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x + 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $-8 \leq a \leq \frac{7}{4}$.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x + 5y + 5| = 52 & (1) \\ y - 2 = a(x - 5) & (2) \end{cases} \\ & (1) \quad \begin{cases} x + 5y + 5 \geq 0 \\ x^2 + 5x + y^2 + y - x - 5y - 5 = 52 \\ y \leq -\frac{x-5}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{x-5}{5} \\ x^2 + 4x + y^2 - 4y = 57 \\ y \leq -\frac{x-5}{5} \\ x^2 + 6x + y^2 + 6y = 42 \end{cases} \\ & \begin{cases} y \geq -\frac{x-5}{5} & (1.1) \\ (x+2)^2 + (y-2)^2 = 65 - \text{уравн. окр-ти с центром в т. } Q(-2; 2) \text{ и } R_1 = \sqrt{65} \\ y \leq -\frac{x-5}{5} & (1.2) \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 = 65 - \text{уравн. окр-ти с центром в т. } P(-3; -3) \text{ и } R_2 = R_1 = \sqrt{65} \end{cases} \\ & (1.1) \quad \begin{cases} y \geq -\frac{x-5}{5} \\ (x+2)^2 + (y+2)^2 = 65 \end{cases} \\ & \text{т перес с прямой } y = -\frac{x-5}{5} \\ & (x+2)^2 + \left(-\frac{x-5}{5} + 2\right)^2 = 65 \\ & (x+2)^2 + \left(-\frac{(x+5)-10}{5}\right)^2 = 65 \\ & (x+2)^2 + \frac{(x+5+10)^2}{25} = 65 \\ & (x+2)^2 + \frac{(x+15)^2}{25} = 65 \\ & x^2 + 4x + 4 + \frac{x^2 + 30x + 225}{25} = 65 \\ & 25x^2 + 100x + 100 + x^2 + 30x + 225 = 65 \cdot 25 = 0 \\ & 26x^2 + 130x - 1300 = 0 \\ & 2x^2 + 10x - 100 = 0 \\ & x^2 + 5x - 50 = 0 \\ & \Delta = 25 + 200 = 225 \\ & x_1 = \frac{-5 + 15}{2} = 5, \quad y_1 = -\frac{5-5}{5} = -2 \\ & x_2 = \frac{-5 - 15}{2} = -10, \quad y_2 = \frac{10-5}{5} = 1 \end{aligned}$$

$$1. 2.) \quad \begin{cases} y < -\frac{x-5}{5} \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 = 65 \end{cases}$$

и перес. спр $y = -\frac{x-5}{5}$

$$(x+3)^2 + \left(\frac{x+5}{5}\right)^2 = 65$$

$$25x^2 + 6 \cdot 25x + 9 \cdot 25 + (x+5)^2 - 65 \cdot 25 = 0$$

$$26x^2 + 150x + 225 - 20x + 100 - 1625 = 0$$

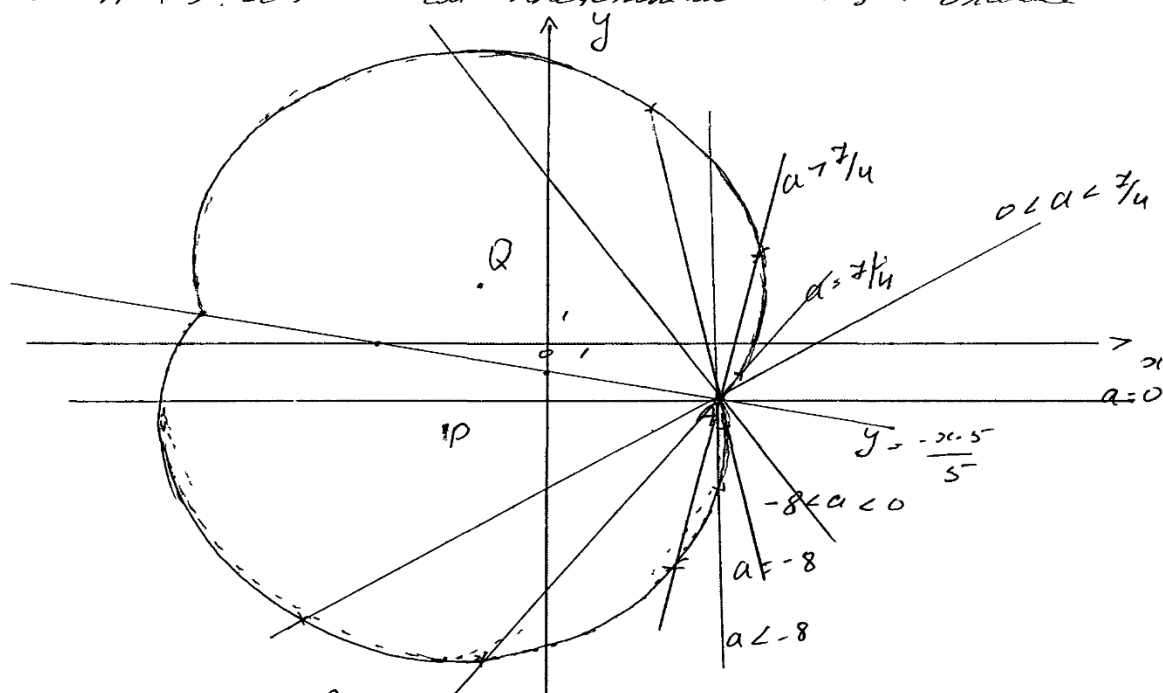
$$26x^2 + 130x - 1300 = 0$$

$$x^2 + 5x - 50 = 0$$

$$x_3 = x_1 = 5, \quad y_3 = y_1 = -2$$

$$x_4 = x_2 = -10, \quad y_4 = y_2 = 1$$

(2) $y = a(x-5) - 2$ - уравн. прямой, проходящей через $A(5; -2)$ с произвольным наклоном



при $a = 0$ - 2 реш. в

найдем a , при к-м $y = a(x-5) - 2$ касается окруж. с ц. в O

$$(x+2)^2 + (a(x-5) - 2)^2 = 65$$

$$x^2 + 4x + 4 + (a(x-5) - 4)^2 = 65$$

$$x^2 + 4x + 4 + a^2(x-5)^2 - 8a(x-5) + 16 - 65 = 0$$

$$x^2 + 4x + a^2(x^2 - 10x + 25) - 8ax + 40a - 45 = 0$$

$$x^2 + 4x + a^2(x^2 - 10x + 25) - 8ax + 40a - 45 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (2 - 5a^2 - 4a)^2 - (a^2 + 1)(25a^2 + 40a - 45) =$$

$$(5a^2 + 4a - 2)^2 - (a^2 + 1)(25a^2 + 40a - 45) = 0 \text{ и получим наклон}$$

$$25a^4 + 40a^3 + 16a^2 - 22a^2 - 16a + 4 - 25a^4 - 40a^3 + 45a^2 - 25a^2 - 40a + 45 = 16a^2 - 40a + 45 - 16a + 4 =$$

$$= 16a^2 - 56a + 49 = 0 \text{ (т.к. ур-е должно иметь ещё}$$

реш-е)

$$16a^2 - 56a + 49 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 28^2 - 16 \cdot 49 = 0$$

$$(4a - 7)^2 = 0$$

при $a = \frac{7}{4}$ - 3 реш-я

при $a > \frac{7}{4}$ - 3 реш-я, при $a \in (0; \frac{7}{4})$ - 2 р-я

найдем a , при к-х $y = a(x-5) - 2$ кас. окружн с Γ в m р

$$x^2 + 6x + (a(x-5) - 2)^2 + 6(a(x-5) - 2) - 4x = 0$$

$$x^2 + 6x + a^2(x-5)^2 - 4a(x-5) + 4 + 6a(x-5) - 12 - 4x = 0$$

$$x^2 + 6x + a^2(x^2 - 10x + 25) - 4ax + 20a + 6ax - 30a - 55 = 0$$

$$x^2(1 + a^2) + 6x - 10a^2x + 25a^2 + 2ax - 10a - 55 = 0$$

$$x^2(a^2 + 1) + x(6 - 10a^2 + 2a) + 25a^2 - 10a - 55 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (3 + a - 5a^2)^2 - (a^2 + 1)(25a^2 - 10a - 55) =$$

$$= 9 + 6(4 - 5a^2) + (a - 5a^2)^2 - 25a^4 + 10a^3 + 55a^2 -$$

$$- 25a^2 + 10a + 55 = \cancel{25a^4 - 10a^3 + a^2 + 6a - 50a^2} +$$

$$+ 9 - \cancel{25a^4 + 10a^3 + 55a^2} - 25a^2 + 10a + 55 = a^2 + 16a + 64$$

$$a^2 + 16a + 64 = 0 \text{ (т.к. ур-е должно иметь ещё реш-е)}$$

$$(a + 8)^2 = 0$$

при $a = -8$ - 3 р-я

при $a < -8$ - 3 р-я, при $a \in (-8; 0)$ - 2 р-я

Ответ: 2 р-я при $a \in (-8; 0) \cup (0; \frac{7}{4})$ и 0, т.е. при $a \in (-8; \frac{7}{4})$

Комментарий.

Ход решения ясен, изложен более чем подробно. Ошибок нет, кроме недочёта: концы промежутка не включены в ответ.

Оценка эксперта: 3 балла.

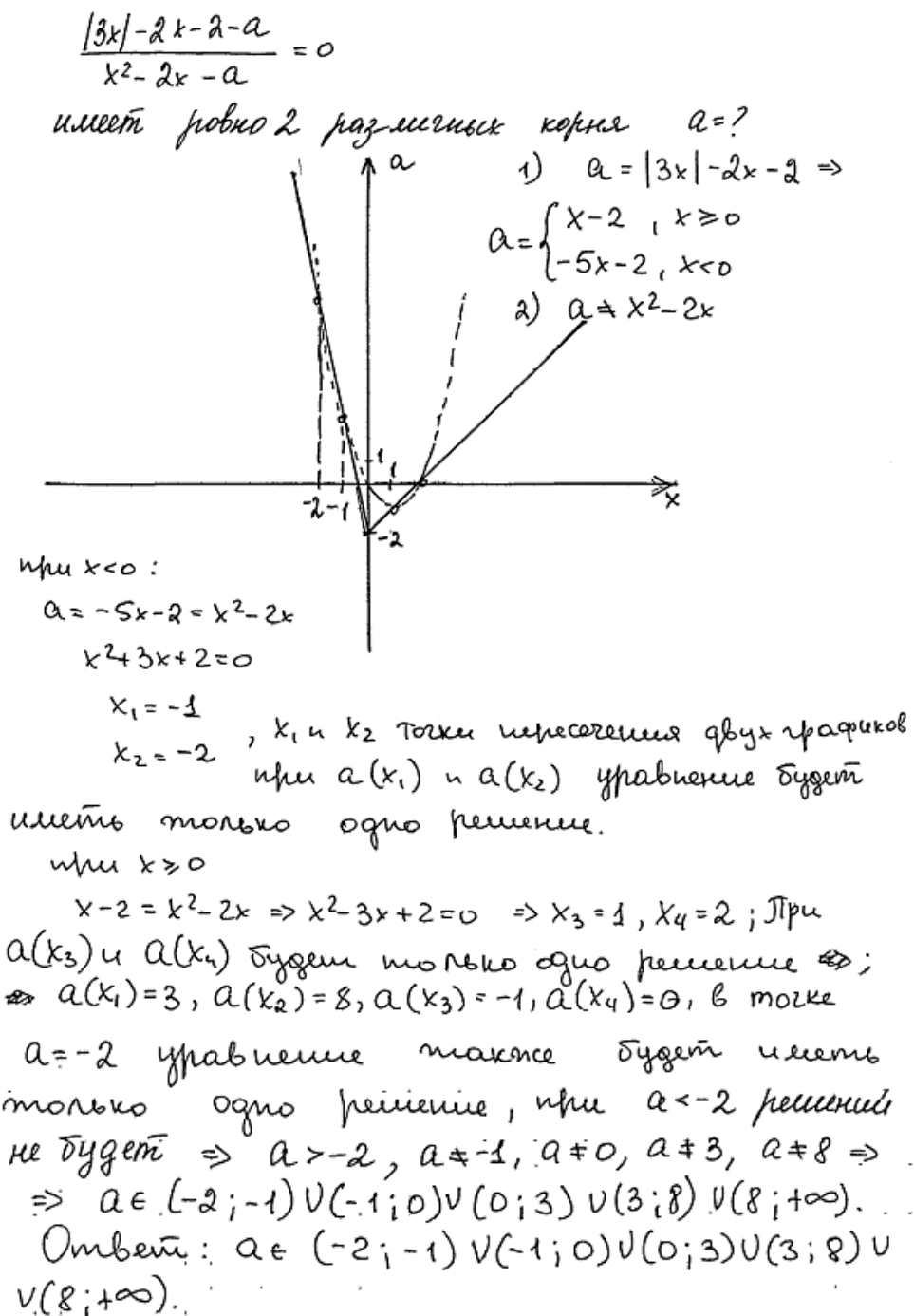
Пример 18.6.1

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.



Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 18.6.2

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

$\frac{13x - 2x - 2 - 0}{x^2 - 2x - 0} = 0$. Если знаменатель не равен нулю, то на него можно сократить.

$$13x - 2x - 2 - a = 0$$

Возведем уравнение в квадрат.

$$(13 \times 1)^2 = (2x + 2 + 9)^2$$

$$5x^2 + x(-8-4a) - 40 - a^2 - 4 = 0$$

$$\textcircled{1} = (-8 - 4a)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (- (a^2 + 4a + 4)) = a^2 + 4a + 4.$$

тогда уравнение имеет 2 решения Δ
причем $\Delta > 0$

$$a^2 + 4a + 4 \geq 0$$

$$(a-2)^2 \geq 0$$

$-\infty \quad + \quad - \quad + \quad \Delta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \in (-\infty; -2); (2; +\infty).$

~~От~~ Теперь разберёмся с ОДЗ.

$x^2 - 2x - a \neq 0 \Rightarrow$ Нам не подходят корни, когда $x^2 - 2x - a = 0$ (если $x^2 - 2x - a = 0$ уравнение имеет менее одного корня)

$$J = 4 + 4a.$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+40}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+10}$$

Если $a \in (-\infty; -2)$, то $x^2 - 2x - a \neq 0$

Если $a \in (2; +\infty)$, то $x^2 - 2x - a = 0 \Rightarrow$

$a \in (2; +\infty)$ не подходит. $\neq$

Omben: $\alpha \in (-\infty; -2)$.

Комментарий.

Неверное решение уравнения, содержащего переменную под знаком модуля.

Неверная логика исследования количества корней.

Оценка эксперта: 0 баллов.

7. Критерии проверки и оценка решений заданий 19

Задание 19 проверяет достижение следующих целей изучения математики на профильном уровне: «развитие логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и её приложений в будущей профессиональной деятельности».

При этом, для решения этой задачи не требуется никаких знаний, выходящих за рамки школьного курса.

Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не степень следования «эталонному» решению.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>a</i> , <i>б</i> и <i>в</i>	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> или <i>б</i>	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>a</i> и <i>б</i> ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i>	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> или <i>б</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Условие задания 19 разбито на пункты — ряд подзадач (частных случаев), последовательно решая которые, можно в итоге полностью выполнить задание. Такое разбиение, в первую очередь, облегчает участнику экзамена планирование работы над данной задачей, а также позволяет более чётко и прозрачно провести оценивание выполнения задания.

Задача 19 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2026 г.)

Из пары натуральных чисел $(a; b)$, где $a > b$, за один ход получают пару $(a + b; a - b)$.

- а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100; 1)$ пару, большее число в которой равно 400?
- б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100; 1)$ пару $(806; 788)$?
- в) Какое наименьшее a может быть в паре $(a; b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806; 788)$?

Решение. а) Из пары $(100; 1)$ за один ход получается пара $(101; 99)$, за два хода получается пара $(200; 2)$, за три хода получается пара $(202; 198)$, а за четыре хода получается пара $(400; 4)$.

б) Заметим, что за один ход из пары $(a; b)$ получается пара $(a + b; a - b)$, а за два хода получается пара $(2a; 2b)$. Следовательно, из пары $(100; 1)$ можно получить только пары $(2^k \cdot 100; 2^k)$ и $(2^k \cdot 101; 2^k \cdot 99)$, где k — неотрицательное целое число. Число 806 не равно $2^k \cdot 100$ и $2^k \cdot 101$, а значит, пару $(806; 788)$ невозможно получить за несколько ходов из пары $(100; 1)$.

в) Заметим, что пару $(c; d)$ за один ход можно получить только из пары $\left(\frac{c+d}{2}; \frac{c-d}{2}\right)$ при условии, что числа c и d одной чётности.

Таким образом, пара $(806; 788)$ получается из пары $(797; 9)$, которая получается из пары $(403; 394)$. Пару $(403; 394)$ невозможно получить за один ход ни из какой пары, поскольку числа 403 и 394 имеют разную чётность. Следовательно, наименьшее число a в паре $(a; b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806; 788)$, равно 403.

Ответ: а) да; б) нет; в) 403.

ИЛИ

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых четырёх или пяти чисел из записанных является целым числом.

- а) Могут ли среди записанных на доске чисел одновременно быть числа 403 и 2013?
- б) Может ли одно из записанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если среди записанных на доске чисел есть число 403?
- в) Известно, что среди записанных на доске чисел есть число 1 и квадрат натурального числа n , большего 1. Найдите наименьшее возможное значение n .

Решение.

а) Рассмотрим пять чисел: a, b, c, d и e , записанных на доске. Средние арифметические $\frac{a+b+c+d}{4}$ и $\frac{b+c+d+e}{4}$ должны быть целыми числами. Следовательно, числа $a+b+c+d$ и $b+c+d+e$ должны делиться на 4, а значит, их разность $a - e$ также должна

делиться на 4. Таким образом, разность любых двух чисел, записанных на доске, делится на 4. Аналогично можно показать, что разность любых двух чисел, записанных на доске, делится на 5, а значит, разность любых двух чисел, записанных на доске, делится на 20.

Разность чисел 2013 и 403 равна 1610 и не делится на 20. Следовательно, числа 403 и 2013 одновременно не могут быть среди записанных чисел.

б) Остаток от деления числа 403 на 20 равен 3. Значит, остаток от деления любого записанного на доске числа на 20 равен 3, то есть любое число, записанное на доске, можно представить в виде $20k + 3$, где k — натуральное число или 0. Остаток от деления такого числа на 4 равен 3.

С другой стороны, остаток от деления любого квадрата натурального числа на 4 равен 0 или 1. Значит, среди чисел, записанных на доске, не может быть квадратов натуральных чисел.

в) Числа 1 и n^2 должны давать одинаковые остатки при делении на 20, то есть число $n^2 - 1$ должно делиться на 20. Поскольку $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$, одно из чисел $n - 1$ и $n + 1$ должно делиться на 5. Таким образом, перебирая числа, для которых это выполнено, то есть числа 4, 6, 9, 11, 14, 16, ..., получаем, что наименьшее значение n , для которого $n^2 - 1$ делится на 20, равно 9.

Примером чисел, удовлетворяющих условию задачи, для которых $n = 9$, служит набор чисел:

1, 21, 41, 61, 81, 101, 121, 141, 161, 181, содержащий число 81.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 9.

Задание 19.1

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх, четырёх, пяти, шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30 021.

- а) Может ли среди записанных на доске чисел быть число 351?
б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 11?
в) Отношение двух записанных на доске чисел является целым числом n . Найдите наименьшее возможное значение n .

Решение.

а) Рассмотрим четыре числа: a , b , c и d , записанные на доске. Средние арифметические $\frac{a+b+c}{3}$ и $\frac{b+c+d}{3}$ должны быть целыми числами. Следовательно, числа $a+b+c$ и $b+c+d$ должны делиться на 3, а значит, их разность $a-d$ также должна делиться на 3. Таким образом, разность любых двух чисел, записанных на доске, делится на 3. Аналогично можно показать, что разность любых двух чисел, записанных на доске, делится на 4, 5 и 6, то есть делится на 60.

Разность чисел 30 021 и 351 равна 29 670 и не делится на 4. Следовательно, числа 351 не может быть среди записанных чисел.

б) Остаток от деления числа 30 021 на 60 равен 21. Значит, остаток от деления любого записанного на доске числа на 60 равен 21, то есть любое число, записанное на доске, можно представить в виде $60k + 21$, где k — натуральное число или 0.

Таким образом, если умножить некоторое число, записанное на доске, на 11, то получится число $11(60k + 21) = 660k + 231 = 60(11k + 3) + 51$, остаток от деления которого на 60 равен 51. Таким образом, получившееся число не может быть записано на доске, а значит, отношение двух записанных на доске чисел не может равняться 11.

в) Предположим, что отношение двух записанных на доске чисел равно n , где $n \geq 2$. Тогда число $n(60k + 21) = 60nk + 21n$ должно давать остаток 21 при делении на 60, то есть число $21n - 21 = 21(n - 1)$ должно делиться на 60, а значит, число $n - 1$ должно делиться на 20. Наименьшее натуральное число, делящееся на 20, равно 20. Следовательно, наименьшее значение n равно 21.

Примером чисел, удовлетворяющих условию задачи, для которых отношение двух из них равно 21, служит набор чисел:

$$21, 81, 141, 201, 261, 321, 381, 441, 501, 30\,021, \text{ в котором } 21 = \frac{441}{21}.$$

Ответ: а) нет; б) нет; в) 21.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах a , b и $в$	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте $в$ и обоснованно получен верный ответ в пункте a или b	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах a и b ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте $в$	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте a или b	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 19.2

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Решение.

а) Если в порту всего два контейнера массой 20 тонн и шесть контейнеров массой 60 тонн, причём один контейнер массой 20 тонн и пять контейнеров массой 60 тонн заполнены сахарным песком, то количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров. Масса контейнеров с сахарным песком равна 320 тонн, а масса всех контейнеров равна 400 тонн, а значит, масса контейнеров с сахарным песком составляет 80 % от общей массы всех контейнеров.

б) Предположим, что в порту было m контейнеров массой 20 тонн и n контейнеров массой 60 тонн, среди которых с сахарным песком было a контейнеров массой 20 тонн и b контейнеров массой 60 тонн. Если масса контейнеров с сахарным песком составляет 40 % от общей массы контейнеров, то должна выполняться система уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 0,75(m + n), \\ 20a + 60b = 0,4(20m + 60n); \end{cases} \quad \begin{cases} 4a + 4b = 3m + 3n, \\ 20a + 60b = 8m + 24n; \end{cases} \quad \begin{cases} 4a + 4b = 3m + 3n, \\ -12a + 28b = -16m. \end{cases}$$

Из равенства $-12a + 28b = -16m$ получаем $m + 3(m - a) + 7b = 0$.

Поскольку $b \geq 0$ и $m \geq a \geq 0$, это равенство может выполняться только при $m = b = a = 0$.

Из системы уравнений следует, что $n = 0$. Получили: $m = b = a = n = 0$, что невозможно. Следовательно, масса контейнеров с сахарным песком не может составить 40 % от общей массы контейнеров.

в) Масса контейнеров с сахарным песком будет составлять наибольшую долю от массы всех контейнеров в случае, когда масса каждого контейнера с сахарным песком равна 60 тонн, а масса каждого контейнера без сахарного песка равна 20 тонн. Если обозначить количество контейнеров с сахарным песком через $3c$, то их масса равна $180c$ тонн, количество контейнеров без сахарного песка равно c , а их масса равна $20c$ тонн. Таким образом, общая масса всех контейнеров равна $200c$ тонн, а значит, масса контейнеров с сахарным песком составляет 90 % от этой массы.

Ответ: а) да; б) нет; в) 90.

Задание 19.3

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Решение.

а) Если в классе 25 учащихся, среди которых 5 девочек, то их доля составляет 20 %, что не превышает 21 %.

б) Если доля девочек в классе составила 30 %, то количество учащихся в нём делится на 10. Следовательно, после появления новой девочки в классе стало 20 учащихся, среди которых 6 девочек. Значит, до появления новой девочки в классе было 19 учащихся, среди которых было 5 девочек. В этом случае доля девочек превышает 21 %. Следовательно, доля девочек не может составить 30 %.

в) Пусть в классе было b учащихся, среди которых a девочек. Тогда, по условию, выполнены неравенства $10 < b \leq 26$ и $\frac{a}{b} \leq 0,21$. Следовательно,

$$\frac{a+1}{b+1} < \frac{a+1}{b} = \frac{a}{b} + \frac{1}{b} < 0,21 + 0,1 \leq 0,31,$$

а значит, после появления новой девочки в классе доля девочек будет меньше 31 %. В пункте б) было доказано, что эта доля не может составить 30 %.

После появления новой девочки в классе доля девочек в процентах составляет $\frac{100(a+1)}{b+1}$.

Предположим, что это число целое. Если оно не делится на 4 и не делится на 5, то число $b+1$ должно делиться на 50. Это невозможно, поскольку $b+1 \leq 27$. Будем последовательно рассматривать числа, меньшие 30, делящиеся на 4 или на 5.

Если $\frac{100(a+1)}{b+1} = 28$, то $25(a+1) = 7(b+1)$. Учитывая, что $b+1 \leq 27$, получаем: $b = 24$,

$a = 6$. В этом случае $\frac{a}{b} = 0,25 > 0,21$.

Если $\frac{100(a+1)}{b+1} = 25$, то $4(a+1) = b+1$. Для чисел $a = 2$ и $b = 11$ это равенство верно,

$10 < b \leq 26$ и $\frac{a}{b} = \frac{2}{11} < 0,2 \leq 0,21$.

Таким образом, после появления новой девочки в классе наибольшая целая доля девочек в процентах составляет 25.

Ответ: а) да; б) нет; в) 25.

Задание 19.4

В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1, a_n = 235$.

Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Решение.

а) Например, последовательность $1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, \dots, 233, -230, 235$

удовлетворяет условию задачи (чередуются суммы чисел 3 и 5).

б) Поскольку 3, 5 и 25 – нечётные числа, любые два соседних члена последовательности имеют разную чётность. На нечётных местах должны стоять нечётные числа, а на чётных – чётные. Число 235 нечётное, поэтому оно не может стоять на чётном месте. Значит, последовательность не может состоять из 1000 членов.

в) Рассмотрим три члена последовательности: a_k, a_{k+1}, a_{k+2} ($1 \leq k \leq n-2$).

Поскольку $a_k + a_{k+1} \geq 3, a_{k+1} + a_{k+2} \leq 25$, получаем: $a_{k+2} \leq a_k + 22$.

В предыдущем пункте было показано, что последовательность должна состоять из нечётного числа членов. Пусть $n = 2m+1$, тогда

$$a_n = a_{2m+1} \leq a_{2m-1} + 22 \leq a_{2m-3} + 22 \cdot 2 \leq \dots \leq a_1 + 22 \cdot m; \quad 235 \leq 1 + 22m,$$

откуда $m \geq 11$. Значит, последовательность состоит не менее чем из 23 чисел.

Приведём пример последовательности, удовлетворяющей условию задачи, состоящей из 23 членов: $1, 2, 23, -20, 45, -42, 67, -64, 89, -86, 111, -108, 133, -130, 155, -150, 175, -170, 195, -190, 215, -210, 235$.

Ответ: а) например, $1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, \dots, 233, -230, 235$; б) нет; в) 23.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>а</i> , <i>б</i> и <i>в</i>	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i> и обоснованно получен верный ответ в пунктах <i>а</i> или <i>б</i>	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>а</i> и <i>б</i> ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i>	2
Обоснованно получен верный ответ в пунктах <i>а</i> или <i>б</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Задание 19.5

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

- а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если все числа на доске кратны 3?
б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?
в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Решение.

а) Если на доске записано 29 зелёных чисел: 3, 6, ..., 87 – и одно красное число 21, то их сумма меньше 1395.

б) Пусть на доске ровно одно красное число. Тогда зелёных чисел 29, а их сумма не меньше, чем сумма 29 наименьших чисел, делящихся на 3:

$$3 + 6 + \dots + 87 = \frac{90 \cdot 29}{2} = 1305.$$

Это противоречит тому, что сумма написанных чисел равна 1067.

в) Пусть на доске написано n красных чисел и $30 - n$ зелёных чисел. Тогда сумма красных чисел не меньше

$$7 + 14 + \dots + 7n = \frac{7n^2 + 7n}{2},$$

а сумма зелёных чисел не меньше

$$3 + 6 + \dots + 3(30 - n) = \frac{3(31 - n)(30 - n)}{2} = \frac{3n^2 - 183n + 2790}{2}.$$

Таким образом, $1067 \geq 5n^2 - 88n + 1395$; $5n^2 - 88n + 328 \leq 0$, откуда, учитывая, что n – целое, получаем $n \geq 6$.

Приведём пример 6 красных чисел и 24 зелёных чисел, сумма которых равна 1067: 7, 14, 21, 28, 35, 56, 3, 6, ..., 66, 69, 78.

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

Задание 19.6

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

- а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?
- б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?
- в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

Решение.

а) Если на тридцати красных карточках написано число 2, а на синих карточках написаны числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 437, то условия задачи выполнены.

б) Пусть сумма чисел, написанных на красных карточках, равна k , а сумма чисел, написанных на синих карточках, равна s . Тогда

$$k + s = 560; k + 3s = 1560,$$

откуда $k = 60$, $s = 500$.

Предположим, что красных карточек 10 штук. Если все числа на красных карточках не превосходят 5, то их сумма k не превосходит $5 \cdot 10 = 50$. Но $k = 60$, значит, есть хотя бы одна карточка, на которой написано число, не меньшее 6. Так как любое число на синей карточке больше любого числа на красной карточке, то все числа на синих карточках не меньше 7, а их сумма не меньше $7 + 8 + \dots + 36 = 645$. Но $s = 500$, значит, не может быть ровно 10 красных карточек.

в) Предположим, что синих карточек n штук, а наибольшее число, написанное на красной карточке, равно u . Тогда $(40 - n)u \geq 60$. С другой стороны, так как любое число на синей карточке больше любого числа на красной карточке, все числа на синих карточках не меньше $u + 1$, а их сумма не меньше

$$(u + 1) + (u + 2) + \dots + (u + n) = nu + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Но $s = 500$, значит,

$$nu + \frac{n(n+1)}{2} \leq 500; u \leq \frac{500}{n} - \frac{n+1}{2}.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{60}{40 - n} \leq u \leq \frac{500}{n} - \frac{n+1}{2}.$$

Заметим, что это неравенство не выполняется при $n \geq 27$, поскольку при $n \geq 27$

$$\frac{60}{40 - n} \geq \frac{60}{13} > 4 \text{ и } \frac{500}{n} - \frac{n+1}{2} \leq \frac{122}{27} < 5.$$

Но неравенство $4 < u < 5$ не имеет целых решений, значит, синих карточек не может быть больше 26.

Покажем, что может быть 26 синих карточек. Если на десяти красных карточках написано число 4, на четырёх красных карточках написано число 5, а на синих карточках написаны числа 6, 7, ..., 29, 30, 50, то условия задачи выполнены.

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>а</i> , <i>б</i> и <i>в</i>	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i> и обоснованно получен верный ответ в пунктах <i>а</i> или <i>б</i>	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>а</i> и <i>б</i> ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i>	2
Обоснованно получен верный ответ в пунктах <i>а</i> или <i>б</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Примеры оценивания решений задания 19

Пример 19.1.1

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх, четырёх, пяти, шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30 021.

- а) Может ли среди записанных на доске чисел быть число 351?
 б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 11?
 в) Отношение двух записанных на доске чисел является целым числом n . Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: а) нет; б) нет; в) 21.

119

3а) докажем, что все числа имеют одинаковые остатки от деления на 3, 4, 5, 6. заметим, числа на этих остатках от деления на 3: x_1 - ост. от дел. на 3 1-го типа; x_2 - второго. т.
 $x_1 + x_2 + x_3 : 3, 7, 8 = 0, 3, 6$
 $x_2 + x_3 + x_4 : 3, 7, 8 = 0, 3, 6$
 $1^\circ x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 \Rightarrow x_1 = x_4 \checkmark$
 $2^\circ x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 + 3 \Rightarrow x_1 = x_4 + 3 \quad x_1 \in [0, 2] ; x_4 \in [0, 2] \Rightarrow 3 \nmid x_1$

а) $3^\circ x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 + 6 \Rightarrow x_1 = x_4 + 6, x_1 \in [0, 2] ; x_4 \in [0, 2] \Rightarrow x_4 + 6 \geq 6 \nmid$
 $4^\circ x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 - 3 \Rightarrow x_1 + 3 = x_4 ; x_4 \in [0, 2] ; x_1 \in [0, 2] \Rightarrow x_1 + 3 \geq 3 \nmid$
 $5^\circ x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 - 6 \Rightarrow x_1 + 6 = x_4 ; x_4 \in [0, 2] ; x_1 \in [0, 2] \Rightarrow x_1 + 6 \geq 6 \nmid$
 из этого следует, что $x_1 = x_4$, аналогично для всех чисел, с остатком от деления на 4, 5, 6.
 числа можно представить, как $3a_1 + b_1, 4a_2 + b_2, 5a_3 + b_3, 6a_4 + b_4$
 т.ч. числа имеют одинаковые остатки от 3, 4, 5, 6 по модулю НОК(3, 4, 5, 6) = 60
 $\Rightarrow$ числа имеют вид $60a + b$ 30071 - записано $\Rightarrow b = \text{остаток от деления } 30071 \text{ на } 60 = 21 \Rightarrow$ числа имеют вид $60a + 21$

30071 имеет ост. от дел. на 4 = 3
 351 имеет ост. от дел. на 4 = 1 $\Rightarrow$ 351 не подх.

б) первое число = $60a_1 + 21$; второе = $60a_2 + 21$ $\frac{60a_2 + 21}{60a_1 + 21} = 11$
 $11(60a_1 + 21) = 60a_2 + 21 \quad 210 = 60(a_2 - 11a_1) \Rightarrow a_2 - 11a_1 = \frac{7}{2}$

т.ч. противоречие $\Rightarrow$ не может, нет

в) $\frac{60a_2 + 21}{60a_1 + 21} = n \quad 60a_2 + 21 = 60 \cdot n \cdot a_1 + 21 \cdot n$
 $(n-1)21 = 60a_2 - n \cdot 60a_1$

$\frac{(n-1)21}{60} = \underbrace{a_2 - (n)a_1}_{\text{целое}} \Rightarrow \frac{(n-1)21}{60} \Rightarrow \text{должно быть целым} \Rightarrow \frac{(n-1) \cdot 7}{20} - \text{целое} \Rightarrow$
 $\Rightarrow n-1=20 \Rightarrow n=21$

Ответ: а) нет; б) нет; в) 21

Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б. Не доказана реализуемость найденного отношения в пункте в.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.1.2

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх, четырёх, пяти, шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30 021.

- Может ли среди записанных на доске чисел быть число 351?
- Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 11?
- Отношение двух записанных на доске чисел является целым числом n . Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: а) нет; б) нет; в) 21.

а) ~~Будет ли~~ нет, не может. $\frac{30021 + 351 + x + y}{4} \in \mathbb{Z}$
 $\downarrow$
 Пусть число 351 есть на доске. Тогда $30021 + 351 + x + y : 4$,
 для любых двух x, y с доски. $30021 + 351 = 30372 : 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x + y : 4$. Посмотрим на возможные остатки по модулю 4
 у x и y : $(0,0), (2,2), (1,3)$. Пусть ~~какие-то~~ (x, y) имеют
 остаток $(1,3)$. Тогда рассмотрим тройку $30021, 351, x$.
 Какое бы число мы не взяли четвертым, их сумма $: 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow y$ этого четвертого числа остаток $4 - 1 = 3 \pmod 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow y$ 7 чисел из 10 будет остаток 3. Тогда возьмем x и
 три таких числа их сумма $\equiv 1 + 3 + 3 + 3 \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow$ сумма $\not\equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow$ ~~противоречие~~
 $\Rightarrow$ Все числа кроме 30021 и 351 будут четными. Тогда аналогично
 351 и три ~~других~~ ^{четных} числа будут в сумме $\equiv 3 +$ будут
 в сумме нечетны $\Rightarrow$ не будут $: 4 \Rightarrow$ ~~противоречие~~.

б) ~~нет~~ нет, не может.

Пусть на доске есть числа a и $11a$. $\frac{11a}{a} = 11$.
 Тогда рассмотрим четверку $30021, a, 11a, x$, где x -
 любое из оставшихся чисел. $30021 \equiv 1, a + 11a = 12a : 3$
 $\Rightarrow x \equiv 4 - 0 - 1 \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow$ 7 чисел на доске $\equiv 3$. Тогда возьмем
~~два таких~~ два таких числа вместе с a и $11a$.
 Их сумма будет $\equiv 0 + 3 + 3 \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow$ сумма $\not\equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ противоречие

Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.1.3

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх, четырёх, пяти, шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30 021.

- Может ли среди записанных на доске чисел быть число 351?
- Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 11?
- Отношение двух записанных на доске чисел является целым числом n . Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: а) нет; б) нет; в) 21.

19

а) Для того, чтобы среднее арифметическое 3, 4, 5, 6 чисел было целым числом, необходимо, чтобы их сумма делилась на 3, 4, 5, 6 соответственно.

Рассмотрим остатки делимости на 6 (с 3, 4, 5 итд. аналогично): всего их будет (0; 1; 2; 3; 4; 5)

Рассмотрим 2 случая:

1) Все остатки одинаковы, тогда любое n_i можно представить как $n_i = 6k_i + n$, где $n < 6$

Среднее арифметическое (а) получится

$$a = \frac{6k_1 + 6k_2 + 6k_3 + 6k_4 + 6k_5 + 6n}{6} = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + n \text{ (результатом)}$$

всегда будет целое число)

II Остатки разные:

~~Когда среди 10 чисел нет...~~ Если среди 10 чисел нет чисел, подходящих под условие, то очевидно, что такой вариант не подходит. Если же такой набор есть, то в нём можно заменить одно число на число с другим остатком и получить неподходящий набор, что не удовлетворяет условию.

задачи. ~~Решение~~

Необходимо все числа должны быть равны по модулям 3, 4, 5 и 6

По условию на доске уже есть число 351, необходимо также и должно иметь такие же остатки, т.е.

$$n_i \equiv 0 \pmod{3}$$

$$n_i \equiv 1 \pmod{4}$$

$$n_i \equiv 1 \pmod{5}$$

$$n_i \equiv 3 \pmod{6}$$

Проверим, подходит ли 351 по остаткам:

$$351 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$351 \equiv 3 \pmod{4}$$

Нет, не подходит, т.к. она не имеет такой же пары последовательности

б) При ~~решении~~ Используя доказанные в пункте а утверждения про остатки проверим, что ~~каждые~~ могут ли числа x и $11x$ иметь одинаковые остатки

$$\text{если } x \equiv 0 \pmod{3}, \text{ то } 11x \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{если } x \equiv 1 \pmod{4}, \text{ то } 11x \equiv 3 \pmod{4}$$

Получается, что не может, т.к. остатки будут разными, что не подходит по условию задачи (см. пункт а)

Для этого необходимо найти наименьшее число, чтобы оно ~~удовлетворяло~~ имело такие же остатки как 351 (проверим по модулю)

9 не подходит, т.к. $9 \equiv 4 \pmod{5}$, 16 не подходит, т.к. $16 \equiv 0 \pmod{4}$,

21 - подходит

Ответ: а) Нет б) Нет в) 21

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте а. Решение пункта б необосновано. Ответ в пункте в не обоснован.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 19.1.4

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх, четырёх, пяти, шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30 021.

- Может ли среди записанных на доске чисел быть число 351?
- Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 11?
- Отношение двух записанных на доске чисел является целым числом n . Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: а) нет; б) нет; в) 21.

10 натуральных чисел: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$
 Так как нам надо чтобы все числа делились на 3, значит все числа должны делиться на 3, потому что иначе найдутся какие-то 3 числа, сумма которых $\neq 3$
 Рассмотрим остатки при делении сумм 4 чисел на 4
 $351 \equiv 3 \pmod{4}$
 $30021 \equiv 1 \pmod{4}$
 любое число можно представить в виде $4k; k \in \mathbb{Z}; k \in [0; 3]$
 рассмотрим возможные значения остатков от деления на 4
 попарная взаимность:

число	$a_1 = 351$	$a_2 = 30021$	a_3	a_4
ост	3	1	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\{0; 1; 2; 3\}$

 так как модно 4 числа должны делиться на 4, то сумма остатков любых чисел должна делиться на 4; $3+1$ (остаток от деления на 4, u)
 $\Rightarrow$ возможны только пары остатков от a_3, a_4 : $(0; 0) \vee (0; 2) \vee (1; 3)$, но тогда при всех данных значениях остатков остальные числа будут иметь остатки не делящиеся на 4. Противоречие.
 Ответ: а) Нет, противоречие.

Комментарий.

Необоснованно получен ответ в пункте а.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 19.2.1

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Ответ: а) да; б) нет; в) 90.

19. а) Да, например:

С песком - $\boxed{60}\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}$ - 160 т.

Без песка - $\boxed{20}\boxed{20}$ - 40 т.

$$\frac{160}{160+40} = \frac{160}{200} = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \frac{6}{6+2} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Ответ: а) да.

б) Бл-к. количество контейнеров с песком составляет 75% или $\frac{3}{4}$ от общего кол-ва контейнеров, но кол-во контейнеров крайнего Ч и отвлеченное кол-во стоек к кол-ву без песка равно 3:1.

Тогда будем брать конт. с песком ~~максимальной~~ массы, а конт. без песка с максимальной массой, чтобы получить максимальный процент.

Если кол-во конт. 4: с песком: $\boxed{60}\boxed{20}\boxed{20}$ - 60 т $\frac{60}{60+60} = 0,5 > 0,4$
без песка: $\boxed{60}$ - 60 т

Если кол-во конт. 8: с песком: $\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}$ - 120 т $\frac{120}{120+60} = 0,67 > 0,4$
без песка: $\boxed{60}\boxed{60}$ - 120 т

Три дальнейших увел. конт. процент не увеличивается

⇒ процент ≥ 50

Ответ: б) нет

в) Тогда будем брать конт. с песком макс. массы, а конт. без песка с мин. массой, чтобы процент был максимальным.

Если кол-во конт. 4: с песком: $\boxed{60}\boxed{60}\boxed{60}$ - 180 т $\frac{180}{180+20} = \frac{9}{10} = 0,9$
без песка: $\boxed{20}$ - 20 т

Если кол-во конт. 8: с песком: $\boxed{60}\boxed{60}\boxed{60}\boxed{60}\boxed{60}\boxed{60}$ - 360 т $\frac{360}{360+40} = 0,9$
без песка: $\boxed{20}\boxed{20}$ - 40 т

Три дальнейших увел. кол-ва конт. процент не увеличивается:

⇒ процент ≤ 90

Ответ: в) 90

Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 19.2.2

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Ответ: а) да; б) нет; в) 90.

№13. Пусть всего x контейнеров $\rightarrow$ сахаром $0,75x$;
 без сахара $\rightarrow 0,25x$.

Максимальная масса без контейнеров без сахара =
 $= 0,25x \cdot 60 = 15x$.
 минимальная масса контейнеров с сахаром $= 0,75x \cdot 20 =$
 $= 15x$

$\downarrow$
 $z = \frac{15x}{15x+15x} = \frac{1}{2} = 50\% \rightarrow$ это минимально возможное
 $50\% > 40\% \rightarrow$ значит да.

Ответ: а) да; б) нет.

б) Пусть контейнер такой x ; с сахаром $0,75x$; без $0,25x$
 $\downarrow$
 максимальная масса контейнеров с сахаром $= 0,75x \cdot 60 =$
 $= 45x$
 минимальная масса контейнеров без сахара $= 0,25x \cdot 20 =$
 $= 5x$

$\downarrow$
 $z = \frac{45x}{45x+5x} = \frac{90}{100} = 0,9 = 90\% \rightarrow$ максимальное значение
 $z = 90\%$.

а) максимальное $z = 90\%$; минимальное $z = 50\%$;
 $z = 80\%$ больше 50% и меньше 90%
 $\downarrow$
 можно.

Ответ: а) да; б) нет; в) 90%.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте б, пункт а не выполнен, так как попадание в нужный интервал не гарантирует, что это реализуется.

Оценка эксперта: 3 балла.

Пример 19.2.3

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Ответ: а) да; б) нет; в) 90.

19

а) пусть есть a конт по 20т; b по 60т;
 c из a зап. песок; d из b зап. песок. ясно, что $a \geq c$; $b \geq d$

тогда по усл $(c+d) = 0.75(a+b) \Rightarrow 4c+4d = 3a+3b$

а) $(c \cdot 20 + d \cdot 60) = 0.8(a \cdot 20 + b \cdot 60)$
 $20c + 60d = 16a + 48b \quad | :4$

$$\begin{cases} 5c + 15d = 4a + 12b \\ 4c + 4d = 3a + 3b \end{cases}$$

Пример: $a=14; c=10; b=2; d=2$. тогда
 $5 \cdot 10 + 15 \cdot 2 = 4 \cdot 14 + 12 \cdot 2$
 $4 \cdot 10 + 4 \cdot 2 = 3 \cdot 14 + 3 \cdot 2 \quad \checkmark$ Ответ: да, можно

б) $(c+d) \text{ тогда } (20c+60d) = 0.4(20a+60b)$
 $20c+60d = 8a+24b \quad | :4$

$$\begin{cases} 5c+15d = 2a+6b & \textcircled{2} \\ 4c+4d = 3a+3b & \textcircled{1} \end{cases}$$

$\begin{matrix} a=9 & b=1 \\ c=6 & d=1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 5 \cdot 6 + 15 \cdot 1 = 2 \cdot 9 + 6 \cdot 1 \\ 4 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 3 \cdot 9 + 3 \cdot 1 \end{matrix}$

Умножу $\textcircled{1}$ на $\textcircled{2} \cdot 2$ и вычту $\textcircled{2}$:
 $3c - 7d = 4a \rightarrow 3c = 4a + 7d$ 3-24, что по усл $a \geq c \Rightarrow 4a + 7d \geq 4c + 7d$ это не может равняться $3c$ противоречие $\Rightarrow$ ответ: нет

Комментарий.

В заданиях пунктов а и б обоснованно получены верные ответы, задание пункта в не решено. Решение пункта в отсутствует.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.2.4

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Ответ: а) да; б) нет; в) 90.

19

а) Отв.: может

Пример: с сахаром 1 меш с 20 тонн 4 с 60 тонн
всего: 2 меш. с 20 тонн 4 с 60 тонн

$$\frac{(1+5)}{2+6} = \frac{3}{4} - \text{истин}$$

$$\frac{20+5 \cdot 60}{2 \cdot 20+6 \cdot 60} = \frac{320}{400} = 0,8 - \text{истина.}$$

б) Пусть x - меш мешков с 20 тонн - сахар
 y - меш мешков с 60 тонн сахар
 a - меш мешков с 20 тонн
 b - меш мешков с 60 тонн

$$x+y = \frac{3}{4} (a+b) \text{ (по усл.)} \quad a+b=5' \quad 0 \leq b \leq 5'$$

$$\frac{20x+60y}{20a+60b} = \frac{x+y}{a+b} = \frac{\frac{3}{4}(a+b)+y}{a+b} = \frac{3}{4} + \frac{4y-b}{4a+4b}$$

найдём миним. знач. $\frac{4y-b}{2a+4b}$, макс. при $y=0$ $\frac{-5}{65} = -\frac{1}{13}$
 $\frac{3}{4} - \frac{1}{13} > \frac{1}{5} \Rightarrow \text{такого не может быть.}$

ответ: не может.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте а. В решении пункта б использована необоснованная оценка.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 19.3.1

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 25.

N19.

Пусть мальчиков - x ; девочек - y ; $x, y \in \mathbb{N}$; $10 \leq x+y \leq 26$.

а) Да, например $x=21$; $y=5$. Или 26: $10 \leq 26 \leq 26$.
 При этом: $\frac{5}{26} \nless \frac{21}{100} \Leftrightarrow \frac{500}{2600} \nless \frac{546}{1600} \Leftrightarrow 500 < 546 \rightarrow \frac{5}{26} < \frac{21}{100}$

б) По условию: $\frac{y}{x+y} \leq 0,21 \rightarrow y \leq 0,21x + 0,21y \rightarrow 0,79y \geq 0,21x$
 ~~$x \geq \frac{26y}{21} \rightarrow x \geq \frac{26 \cdot 5}{21} \rightarrow x \geq 6,19$~~
 $x \geq \frac{0,79y}{0,21}$

Если в класс придет новая девочка, то x будет $(y+1)$.
 По усл.: $\frac{y+1}{x+y+1} = 0,3 \Leftrightarrow y+1 = 0,3x + 0,3y + 0,3$
 $0,7y - 0,3x + 0,7 = 0 \quad | \cdot 10$
 $7y - 3x + 7 = 0$
 $3x = 7y + 7$
 $x = \frac{7y+7}{3}$

Подставим x в $x \geq \frac{0,79y}{0,21}$:
 $\frac{7y+7}{3} \geq \frac{79y}{21} \quad | \cdot 21 \Rightarrow 7(7y+7) \geq 79y$
 $49y + 49 \geq 79y$
 $30y \leq 49 \quad y \leq \frac{49}{30}$

Т.к. $y \in \mathbb{Z}$, то единственное возможное $y=1$.
 Тогда $x = \frac{7 \cdot 1 + 7}{3} = \frac{14}{3} \notin \mathbb{N}$.
 Нет, такое невозможно.

Комментарий.

В заданиях пунктов а и б обоснованно получены верные ответы, задание пункта в не решено.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.3.2

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 25.

а) Да, например 5 девочек и 26 всего.
 Доля девочек: $\frac{5}{26} \cdot 100\% = 19 \frac{6}{26} \%$.

б) Пусть девочек x , n - всего.
 Тогда $\frac{x}{n} \leq 0,21$, $\frac{x+1}{n+1} \leq 0,3$.
 $0,3n - 0,21 \leq 0,21$
 $0,3 - \frac{0,21}{n} \leq 0,21$
 $\frac{0,21}{n} \geq 0,09$
 $n \leq 2,33$
 Но т.к. $11 \leq n \leq 26$, то $12 \leq n+1 \leq 27$.
 Единств. возможный вариант $x=5, n=19$.
 Но тогда изначально доля девочек была $\frac{5}{19} \cdot 100\% = 26 \frac{6}{19} \%$, что противоречит условию. Невозможно.

в) Пусть x - девочек, y - мальчиков. Новая доля девочек: $\frac{x+1}{x+y+1}$.
 Видно, что чем больше y , тем больше доля.

Комментарий.

В заданиях пунктов а и б обоснованно получены верные ответы, задание пункта в не решено.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.3.3

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 25.

№ 19

$$10 < \text{учеников} \leq 26 \quad \text{девочек} \leq 21\%$$

- а) если девочек 5 шт, то предположим, что это 20% от общего количества учеников; составим пропорцию
- $$\begin{array}{l} 5 - 20\% \\ x - 100\% \end{array} \quad x = \frac{5 \cdot 100}{20} = 25 \text{ учеников}$$
- условия выполняются, значит, такое может быть

Ответ: да, может

- б) предположим, что девочек было 5 шт, а когда пришла новая, их стало 6, которые составляют 30% от общего кол-ва учеников; составим пропорцию
- $$\begin{array}{l} 6 - 30\% \\ x - 100\% \end{array} \quad x = \frac{6 \cdot 100}{30} = 20 \text{ учеников}$$

в таком случае условия выполняются, значит, такое может быть

Ответ: да, может

- в) если в класс пришла новая девочка, то общее количество учеников теперь не должно превышать 27 шт.
- составим пропорцию

$$\begin{array}{l} x \text{ девочек} - \text{max. процент } \% \\ \text{учеников} - 100\% \end{array}$$

$$\frac{x}{100} = \frac{\text{max. \%} \cdot 100}{y}$$

$$\text{max. \%} = \frac{x \cdot 100}{y}$$

~~х девочек - 100 девочек~~

предположим, что девочек в классе 9, а всего 12 человек, тогда:

$$\% = \frac{9 \cdot 100}{12} = 75\%$$

если девочек 12, а всего 15 учеников, тогда:

$$\% = \frac{12 \cdot 100}{15} = 80\%$$

если девочек 16, а всего учеников 20, то

$$\% = \frac{16 \cdot 100}{20} = 80\%$$

если девочек 9, а всего учеников 15, то

$$\% = \frac{9 \cdot 100}{15} = 60\%$$

при дальнейшем выборе % девочек увеличивается, значит
максимальный процент равен 80%.

Ответ: а) да
б) да
в) 80 %

Комментарий.

Задание пункта а выполнено верно, в заданиях пунктов б и в получены неверные ответы.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 19.4.1

В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1, a_n = 235$.

Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Ответ: а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, ..., 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

б) Нет. т.к. в этой посл. $a_i + a_{i+1} = \begin{cases} 3 \\ 5 \\ 25 \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ т.к. a_1 - неч., то все четные члены - чет,
а нечетные - неч $\Rightarrow a_n = 235$ - неч член т.е.
 n не 1000. $\Rightarrow$ невозможно. не может.

а) 1; 2; 1; 6; 2; 3; 2

а) 1; -26; 51; -46; 71; -66; 91; -86; 111; -106; 131;
-126; 151; -146; 171; -166; 191; -188; 213; -210; 235

Комментарий.

В пункте а допущена ошибка: сумма первых двух чисел равна -25. При ответе на вопрос пункта б участник экзамена верно показал, что случай $n=1000$ невозможен. Решение пункта в отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 19.4.2

В последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1, a_n = 235$.

Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Ответ: а) например, 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, ..., 233, -230, 235; б) нет; в) 23.

А) Пример такой последовательности:

1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, 9, -6, 11, -8, 13, -10, 15, -12, 17, -14, 19, -16, 21, -18, 23, -20, 25, -22, 27, -24, 29, -26, 31, -28, 33, -30, 35, -32, 37, -34, 39, -36, 41, -38, 43, -40, 45, -42, 47, -44, 49, -46, 51, -48, 53, -50, 55, -52, 57, -54, 59, -56, 61, -58, 63, -60, 65, -62, 67, -64, 69, -66, 71, -68, 73, -70, 75, -72, 77, -74, 79, -76, 81, -78, 83, -80, 85, -82, 87, -84, 89, -86, 91, -88, 93, -90, 95, -92, 97, -94, 99, -96, 101, -98, 103, -100, 105, -102, 107, -104, 109, -106, 111, -108, 113, -110, 115, -112, 117, -114, 119, -116, 121, -118, 123, -120, 125, -122, 127, -124, 129, -126, 131, -128, 133, -130, 135, -132, 137, -134, 139, -136, 141, -138, 143, -140, 145, -142, 147, -144, 149, -146, 151, -148, 153, -150, 155, -152, 157, -154, 159, -156, 161, -158, 163, -160, 165, -162, 167, -164, 169, -166, 171, -168, 173, -170, 175, -172, 177, -174, 179, -176, 181, -178, 183, -180, 185, -182, 187, -184, 189, -186, 191, -188, 193, -190, 195, -192, 197, -194, 199, -196, 201, -198, 203, -200, 205, -202, 207, -204, 209, -206, 211, -208, 213, -210, 215, -212, 217, -214, 219, -216, 221, -218, 223, -220, 225, -222, 227, -224, 229, -226, 231, -228, 233, -230, 235.

Б) Да, например, последовательность, членами которой являются чередующиеся числа 0 и 3.

0, 3, 0, 3, 0, 3...

Сумма любых двух соседних членов в последовательности равна 3, что соответствует условию.

В последовательности, состоящей из 1000 членов, будет пятсот 0 и пятсот 3. Все нечётные члены последовательности будут нулями, все чётные – тройками.

Комментарий.

В пункте а верно приведён пример. Решение пункта б неверно. Решение пункта в отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 19.5.1

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

- Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если все числа на доске кратны 3?
- Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?
- Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а) Да, пример:

$\underbrace{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots, 87}_{\text{зеленые}}, \quad \underbrace{21}_{\text{красное}}$

Сумма чисел $= 1326 < 1395$, т.к. 90 зеленок на 21.

б) Найдем минимально возможную сумму с одним красным числом.

Т.к. сумма $\rightarrow \min \Rightarrow$ красное число $= 7$,
зеленые $= 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots, 87$.

$\Sigma_{\text{числ}} = 1305 + 7 = 1312 > 1067 \Rightarrow$ Не может
Ответ: нет.

в) Пусть $f(n)$ - функция, значение которой равно минимально возможной сумме при данном n . где n - кол-во красных чисел.

$$\begin{aligned} f(n) &= 7 \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) + 3 \cdot \left(\frac{(30-n)(31-n)}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(7n^2 + 7n + 3n^2 + 3 \cdot 61n + 3 \cdot 30 \cdot 31 \right) = \\ &= \frac{1}{2} (10n^2 - 176n + 2790) = 5n^2 - 88n + 1395. \end{aligned}$$

найдем минимальное n ($n \in \mathbb{Z}^+$), такое что $f(n) \leq 1067$.

$$5n^2 - 88n + 1395 \leq 1067$$

$$5n^2 - 88n + 328 \leq 0$$

$$D = 44^2 - 328 \cdot 5 = 1936 - 1640 = 296.$$

$$n \in \left[\frac{44 - \sqrt{296}}{5}, \frac{44 + \sqrt{296}}{5} \right] \Rightarrow n = 6.$$

$$f(6) = 7 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 3 \cdot \frac{24 \cdot 25}{2} = 3(49 + 12 \cdot 25) = 3 \cdot 349 = 1047.$$

$$f(5) = 1380, \Rightarrow \text{для 5-верто.}$$

Ответ: 6- наименьшее кол-во вертолетов.
пример:

7, 14, 21, 28, 35, 56.

3, 6, 9, 12, ..., 69, 78, 87

Комментарий.

Обоснованно получены верные ответы во всех пунктах.

Оценка эксперта: 4 балла.

Пример 19.5.2

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

- Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если все числа на доске кратны 3?
- Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?
- Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

а) $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$ - 30 чисел. Преположим что все они зелёные. Да, может, т.к мы можем заменить число 90 на число 21, при этом-то же число цветом (красным), а всего тогда общее количество чисел уменьшится на 1 - 2.т.е. 9.

б) Возьмём наименьшую сумму чисел написанных только зелёными. Это $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$. Нам нужно добавить одно красное число. Для того, чтобы минимизировать сумму мы добавим самое большое зелёное - 90 и добавим минимально возможное красное - 7. Итоговая сумма $1395 - 90 + 7 = 1312 > 1067 \Rightarrow$ не возможно.

в) Числа кратные 3 не дают остатка при делении на 7. В таблице ниже: 3 6 2 5 1 4 0. Число 1067 даёт остаток 3 при делении на 7 $\Rightarrow$ Это зелёные числа дают накл. можно было бы добавить к ним. Они не могут написать ни 3, ни 6, ни 9, ни 12, ни 15, ни 18, ни 21, ни 24, ни 27, ни 30, ни 33, ни 36, ни 39, ни 42, ни 45, ни 48, ни 51, ни 54, ни 57, ни 60, ни 63, ни 66, ни 69, ни 72, ни 75, ни 78, ни 81, ни 84, ни 87, ни 90. Они не могут написать ни 3, ни 6, ни 9, ни 12, ни 15, ни 18, ни 21, ни 24, ни 27, ни 30, ни 33, ни 36, ни 39, ни 42, ни 45, ни 48, ни 51, ни 54, ни 57, ни 60, ни 63, ни 66, ни 69, ни 72, ни 75, ни 78, ни 81, ни 84, ни 87, ни 90. Они не могут написать ни 3, ни 6, ни 9, ни 12, ни 15, ни 18, ни 21, ни 24, ни 27, ни 30, ни 33, ни 36, ни 39, ни 42, ни 45, ни 48, ни 51, ни 54, ни 57, ни 60, ни 63, ни 66, ни 69, ни 72, ни 75, ни 78, ни 81, ни 84, ни 87, ни 90.

Комментарий.

Приведено верное решение пункта а. Приведено верное решение пункта б. Решение в пункте в не завершено.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.5.3

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

- а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если все числа на доске кратны 3?
- б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?
- в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

- а) индекс обозначает цвет, который имеет число
- а) Можно, так как одно и то же число может быть залито разными цветами.
- пример: $3_г, 6_г, \dots, 87_г, 21_к$
- б) Нет.
- Если только одно число красное, то ^{набор} выведенных с наименьшей суммой $(3_г, 6_г, \dots, 87_г, 7_к)$ сумма равна 1312, что больше, чем 1067
- в) 6.
- В ^{наборе} выведенных с наименьшей суммой красных чисел и наименьшей суммой $(3_г, 6_г, \dots, 87_г, 7_к, 14_к, \dots, 35_к)$ сумма равна 1077, $1077 > 1067$
- Однако сумма будет равна 1067, если в выведенном выше наборе заменить $66_г$ на $56_к$.

Комментарий.

Обоснованно получен ответ в пунктах а и б. В решении пункта в есть логическая ошибка: не доказано, что красных чисел не может быть меньше 5. Взяв 5 красных чисел, нужно взять 25 зелёных чисел, а не 26. Кроме того, сумма чисел найдена неверно.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.5.4

а) Да, может. Например, вместо зеленого числа 24 можно поставить красное число 21 (сказано, что красное число может равняться зеленому). Тогда сумма примет вид $3+6+\dots+21+21+27+\dots+90=1392<1395$.

Ответ: да, может.

б) Число 1067 имеет остаток 2 при делении на 3. Следовательно, красное число тоже должно иметь остаток 2 при делении на 3 (т.к. все зеленые числа имеют остаток 0). Наибольшее такое число - 14. Как известно из пункта а), сумма 30 наибольших зеленых чисел равно 1395. Если мы заменим наибольшее из них (90) на 14, то сумма будет равна $1395-90+14=1319>1067$. Следовательно, такое быть не может.

Ответ: нет, не может.

в) $1395-1067=328 \Rightarrow$ в сумме $3+6+\dots+90$ необходимо так заменить несколько зеленых чисел на красные, чтобы суммарная разница между ними составила 328.

Во-первых, заметим, что за 5 замен это сделать невозможно, поскольку даже если заменить самые большие зеленые числа (90, 87, 84, 81, 78) на самые маленькие красные (7, 14, 21, 28, 35), то суммарная разница составит $305<328$.

Во-вторых, заметим, что если вдобавок заменить 72 на 49 ($72-49=23$), то суммарная разница составит как раз 328 ($305+23=328$) $\Rightarrow$ искомое наименьшее количество красных чисел - 6.

Ответ: 6.

Комментарий.

Обоснованно получен ответ в пунктах а и б. В пункте в неверное обоснование, поскольку не доказано, что набор с минимальным количеством красных чисел получается заменой максимальных чисел из набора 3, 6, ..., 90 на минимально возможные различные красные числа. Кроме того, разница между пятью самыми большими зелёными числами и пятью самыми маленькими красными числами составляет 315.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.6.1

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

- Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?
- Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?
- Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

а) $\text{среднее арифм.} = \frac{\text{сумма}}{\text{кол-во}}$

$\Rightarrow \text{сумма} = \text{с.А} \cdot \text{кол-во}$

Пусть сумма синих L , а красных M , тогда $L + M = 14 \cdot 40$ - это в 1м случае.
Во втором $3L + M = 39 \cdot 40$

$$\begin{cases} L + M = 14 \cdot 40 \Rightarrow M = 14 \cdot 40 - L & (1) \\ 3L + M = 39 \cdot 40 & (2) \end{cases}$$

$1 \rightarrow 2 \quad 3L + 14 \cdot 40 - L = 39 \cdot 40$

$$2L = 40 \cdot 25$$

$$L = 20 \cdot 25 = 500 - \text{сумма}$$

Всех синих = 500 $\Rightarrow$ надо получить 10 различными числами. Это можно сделать, например:

46; 54; 30; 70; 20; 80; 10; 90; 60; 40

б). $L = 500$; $M = 14 \cdot 40 - L \Rightarrow M = 520 - 500 = 20$.

Красных карточек 10. $\Rightarrow$ числа с.А = 2.

среднее арифметическое должно быть 2.

Правильные числа могут быть.

$2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2 \Rightarrow \text{Да}$.

Комментарий.

В решении пункта а есть только описание чисел, написанных на синих карточках. Указание чисел, написанных на красных карточках, отсутствует. В решении пункта б допущена вычислительная ошибка. Решение пункта в отсутствует.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 19.6.2

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

- а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?
- б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?
- в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

x - сумма чисел на красных карточках

y - сумма чисел на синих карточках

$$\begin{cases} x+y=14 \cdot 40=560 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y=39 \cdot 40=1560 \Rightarrow 2y=1000 \Rightarrow y=500, \end{cases}$$

$x=60 \Rightarrow$ сумма ~~чисел~~ неповторяющихся

синих чисел = 500, а красных 60

а) Да, может. Пример: на 30 красных карточках написано число 2, а на 10 синих числа 100, 150, 3, 7, 5, 4, 9, 21, 175, 21. Каждое число на синей карточке больше любого на красной и неповторяется.

б) Нет. Если на столе ровно 10 красных карточек, то самое ~~то~~ маленькое из возможных максимальное число, написанное на карточке будет равно 6, тогда на синих карточках не должно быть числа меньше 7, синих карточек должно быть 30, а сумма на них равить.

ся 500, самый маленький возможный шаг между числами $d=1$, тогда, если $a_1=7$, то сумма всех чисел $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, где $n=30$, так как синих карточек всего 30, $a_n = 29d + a_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow S_n = \frac{7 + 29 \cdot 1 + 7}{2} \cdot 30 = (14 + 29) \cdot 15 = 43 \cdot 15 = 645$, что

больше 500, S_n - минимальная сумма, которая может получиться, т.к. $S_n > 500$ при данных условиях на столе не может быть ровно 10 красных карточек.

в) Ответ: 11, т.к. в других случаях общая сумма чисел на синих карточках превышает 500

Комментарий.

В решении пункта а приведён пример чисел на синих карточках, в котором есть повторяющееся число 21, да и сумма этих чисел равна 495, а не 500. Обоснованно получен ответ в пункте б. Решение пункта в фактически отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.