ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ФИЗИКА. 2026–2027 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС

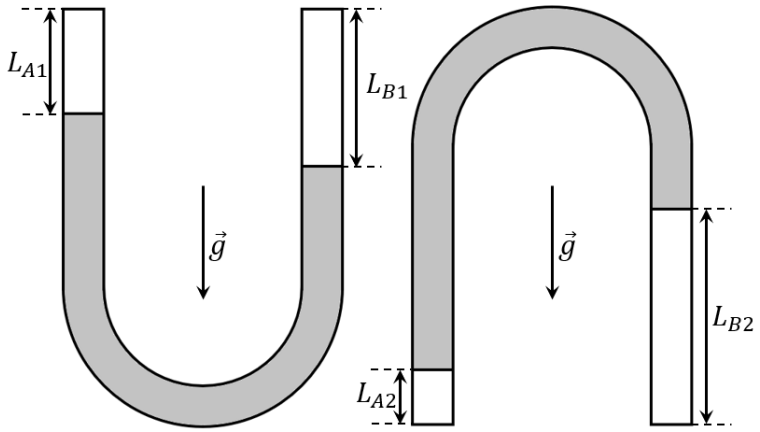
ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Максимальный балл за работу – 50 баллов.

Задание № 1.

TpUбка

В термостате расположена U-образная стеклянная трубка с постоянной площадью поперечного сечения. Длины обоих колен трубки одинаковы, оба конца трубки закрыты. В левом и правом коленах находятся гелий и азот соответственно, разделённые столбиком жидкости, который не разрывается при переворотах трубки. Пузырьки газа не могут перейти из одного колена в другое. Стенки трубки хорошо проводят теплоту, температура в термостате поддерживается постоянной.



Когда U-образная трубка стоит вертикально концами вверх, длины газовых столбов равны

$$L_{A1} = 12 \text{ см}, L_{B1} = 18 \text{ см}.$$

Когда трубка перевёрнута концами вниз, длина столба гелия равна

$$L_{A2} = 6 \text{ см}.$$

Плотность жидкости равна $\rho = 13{,}6 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

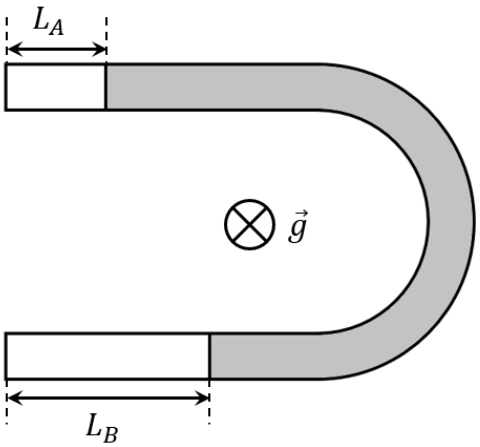
Вопрос 1. Определите длину L_{B2} столба азота после переворота трубки. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целого числа. (**1 балл**)

Вопрос 2. Во сколько раз $n_A = \frac{p_{A2}}{p_{A1}}$ изменилось давление гелия после переворота трубки? Ответ дайте с точностью до сотых. (**1 балл**)

Вопрос 3. Какова разница давлений $p_{A2} - p_{B2}$ гелия и азота после переворота трубки? Ответ дайте в килопаскалях с точностью до десятых. (**1 балл**)

Вопрос 4. Найдите отношение ν_B/ν_A количества азота к количеству гелия. Ответ дайте с точностью до целого числа. (**3 балла**)

U-образную трубку положили на стол горизонтально.



Вопрос 5. Найдите длину L_A столба гелия в таком положении. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до десятых. (**1 балл**)

Вопрос 6. Найдите длину L_B столба азота в таком положении. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до десятых. (**1 балл**)

Вопрос 7. Каким стало давление газов p в таком положении? Ответ дайте в килопаскалях с точностью до десятых. (**2 балла**)

Абсолютную температуру в термостате увеличили в два раза ($T' = 2T$), оставив трубку в горизонтальном положении.

Вопрос 8. На сколько изменилась длина столба гелия после увеличения температуры в результате перехода в новое состояние термодинамического равновесия? Тепловым расширением жидкости пренебрегите. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целого числа. (**2 балла**)

Критерии оценивания: точное совпадение с ответом.

Максимальный балл за задание – 12 баллов.

Матрица параметров к вариантам задания 1.

№ варианта	L_{A1}**, см**	L_{B1}**, см**	L_{A2}**, см**
1	12	18	6
2	16	24	8
3	14	21	7
4	18	27	9
5	10	15	5

Решение:

1. Обозначим площадь поперечного сечения трубки через S. Общий объём трубки и объём жидкости не изменяются, поэтому сумма объёмов двух газов тоже постоянна:

$$S(L_{A1} + L_{B1}) = S(L_{A2} + L_{B2}).$$

После сокращения на S получаем

$$L_{B2} = L_{A1} + L_{B1} - L_{A2} = 24 \text{ см}.$$

2. В процессе переворота температура и количество вещества каждого газа постоянны, поэтому по закону Бойля – Мариотта

$$p_{A1}L_{A1} = p_{A2}L_{A2},$$

откуда $n_A = \frac{p_{A2}}{p_{A1}} = \frac{L_{A1}}{L_{A2}} = 2$.

3. В положении концами вниз уровень жидкости справа выше на $L_{B2} - L_{A2}$, и потому

$$p_{A2} - p_{B2} = \rho g(L_{B2} - L_{A2}) = 24{,}5 \text{ кПа}.$$

4. Аналогично пунктам 2–3: $p_{B2} = \frac{3}{4}p_{B1};\ p_{B1} - p_{A1} = \rho g(L_{B1} - L_{A1})$.

Введём величину $q = \rho g L_{A2}$ и учтём, что $L_{A1} = 2L_{A2}, L_{B1} = 3L_{A2}$.

Тогда система уравнений, описывающих разности и отношения давлений до и после переворота:

$$p_{B1} - p_{A1} = q, \qquad p_{A2} - p_{B2} = 3q,$$

$$p_{A2} = 2p_{A1}, \qquad p_{B2} = \frac{3}{4}p_{B1}.$$

Подставляя $p_{B1} = p_{A1} + q$ во второе уравнение, получаем

$$2p_{A1} - \frac{3}{4}(p_{A1} + q) = 3q.$$

Следовательно,

$$\frac{5}{4}p_{A1} = \frac{15}{4}q, \qquad p_{A1} = 3q.$$

Остальные давления:

$$p_{B1} = 4q, \qquad p_{A2} = 6q, \qquad p_{B2} = 3q.$$

При температуре T_0 для каждого газа выполняется уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$\nu_A RT_0 = p_{A1}SL_{A1}, \qquad \nu_B RT_0 = p_{B1}SL_{B1}.$$

Делением находим

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{p_{B1}L_{B1}}{p_{A1}L_{A1}} = 2.$$

5–6. В горизонтальном положении давление ртути не меняется вдоль её столба, поэтому $p_A = p_B$. Тогда

$$\frac{L_B}{L_A} = \frac{\nu_B}{\nu_A} = 2, \qquad L_A + L_B = L_{A1} + L_{B1}.$$

Решая систему, получаем

$$L_A = \frac{L_{A1} + L_{B1}}{3} = 10\,\text{см}, \qquad L_B = 2\,\frac{L_{A1} + L_{B1}}{3} = 20\,\text{см}.$$

7. Суммируя уравнения состояния обоих газов и сокращая S, имеем

$$p(L_A + L_B) = p_{A1}L_{A1} + p_{B1}L_{B1}.$$

Отсюда

$$p = \frac{3q \cdot 12 + 4q \cdot 18}{30} = 3{,}6q = 29{,}4\ \text{кПа}$$

8. Как было получено ранее, $\frac{L_B}{L_A} = \frac{\nu_B}{\nu_A}$.

Количество вещества каждого газа постоянно; при нагревании их отношение не меняется. Кроме того, объём ртути постоянен:

$$L_A + L_B = L_{A1} + L_{B1} = 30\,\text{см}.$$

Отношение L_B/L_A и сумма $L_A + L_B$ задают обе длины однозначно и не зависят от температуры. Следовательно, удвоение температуры при горизонтальном положении трубки не приводит к перемещению ртути.

$$\Delta L_A = 0.$$

Матрицы ответов к вариантам задания 1.

Вариант	Вопрос 1: L_{B2}, см	Вопрос 2: n, раз	Вопрос 3: Δp, кПа	Вопрос 4: ν_B/ν_A, раз
1	24	2,00	24,5	2
2	32	2,00	32,6	2
3	28	2,00	28,6	2
4	36	2,00	36,7	2
5	20	2,00	20,4	2

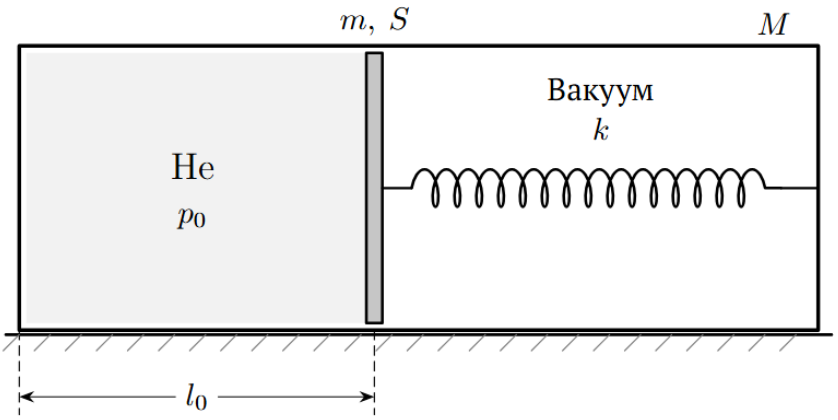
Вариант	Вопрос 5: L_A, см	Вопрос 6: L_B, см	Вопрос 7: p, кПа	Вопрос 8: ΔL_A, см
1	10,0	20,0	29,4	0
2	13,3	26,7	39,2	0
3	11,7	23,3	34,3	0
4	15,0	30,0	44,1	0
5	8,3	16,7	24,5	0

Задание № 2.

Поршень и пружина

На гладкой горизонтальной поверхности находится цилиндрический сосуд массой $M = 4$ кг. Внутри него расположен поршень массой $m = 1$ кг и площадью $S = 100$ см^2, который может двигаться без трения вдоль оси цилиндра. Поршень соединён лёгкой горизонтальной пружиной с жесткостью k =1000 Н/м с правой стенкой сосуда. Справа от поршня – вакуум, слева – гелий, который можно считать идеальным одноатомным газом. Показатель адиабаты гелия $\gamma = \frac{5}{3}$.

Первоначально система находится в равновесии, расстояние от левой стенки цилиндра до поршня равно $l_0 = 40$ см, давление гелия равно $p_0 = 20$ кПа.



Стенки цилиндра и поршень теплоизолированы. Поршень плотно подогнан к стенкам цилиндра. Массой газа по сравнению с m и M можно пренебречь. Цилиндр достаточно длинный: поршень не сталкивается с его торцами.

Удерживая цилиндр неподвижным, поршень медленно перемещают влево до положения, в котором расстояние между поршнем и левой стенкой равно $l = l_0/2$. Известно, что пружина в этом положении не деформирована. Затем поршень и цилиндр одновременно отпускают без начальных скоростей в момент времени $t_0 = 0$ с. Считайте процессы, происходящие с гелием, квазистационарными.

Вопрос 1. Чему равна внутренняя энергия U_0 гелия в момент времени $t_0 = 0$ с? Ответ дайте в джоулях с точностью до целого числа. (**2 балла**)

Вопрос 2. Определите модуль максимальной скорости V_{max} цилиндра при движении системы. Ответ дайте в метрах в секунду с точностью до сотых. (**6 баллов**)

Критерии оценивания: точное совпадение с ответом.

Максимальный балл за задание – 8 баллов.

Матрица параметров к вариантам задания 2.

Вариант	M, кг	m, кг	S, см²	l_0, см	p_0, кПа	k, Н/м
1	4	1	100	40	20	1000
2	6	2	120	60	25	1000
3	5	1	80	40	30	1200
4	8	2	150	50	30	1800
5	7	3	100	50	50	2000

Решение:

Пусть l – расстояние между левой стенкой цилиндра и поршнем. Для обратимого адиабатического процесса справедлив закон Пуассона

$$p(l)l^\gamma = p_0 l_0^\gamma, \qquad p(l) = p_0\left(\frac{l_0}{l}\right)^{5/3}.$$

В начальном положении в соответствии со вторым законом Ньютона:

$$p_0 S - \frac{k l_0}{2} = 0.$$

После перемещения поршня влево на $l_0/2$ пружина становится недеформированной. Таким образом, её потенциальная энергия при любом l выражается как

$$E_{\text{пр}}(l) = \frac{k}{2}\left(l - \frac{l_0}{2}\right)^2.$$

1. Внутренняя энергия гелия равна $U = \nu C_V T = 3pSl/2$. Для обратимой адиабаты:

$$U(l) = \frac{3}{2} p_0 S l_0 \left(\frac{l_0}{l}\right)^{2/3}.$$

В начальном состоянии $l = \frac{l_0}{2}$ начальная внутренняя энергия равна

$$U_0 = U\left(\frac{l_0}{2}\right) = \frac{3}{2} p_0 S l_0 2^{2/3} = 190 \text{ Дж}.$$

2. Пусть X – координата левой стенки цилиндра, x – координата поршня в неподвижной системе отсчёта. Тогда $l = x - X$. После отпускания нет внешних горизонтальных сил, и полный импульс остаётся неизменным и равным нулю:

$$m\dot{x} + M\dot{X} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\dot{x} = \frac{M}{m+M}\dot{l}, \qquad \dot{X} = -\frac{m}{m+M}\dot{l}.$$

Кинетическая энергия поршня и цилиндра поэтому принимает вид

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{l}^2, \qquad \mu = \frac{mM}{m+M},$$

где μ – приведённая масса.

При отпускании поршня $l_1 = l_0/2$, $\dot{l} = 0$. Пружина не деформирована, и полная энергия равна начальной внутренней энергии газа:

$$E_0 = \frac{3}{2}p_0 S l_0\, 2^{2/3}.$$

Далее энергия сохраняется:

$$\frac{1}{2}\mu\dot{l}^2 + \frac{3}{2}p_0 S l_0 \left(\frac{l_0}{l}\right)^{2/3} + \frac{k}{2}\left(l - \frac{l_0}{2}\right)^2 = E_0.$$

Кинетическая энергия максимальна в минимуме суммы двух последних слагаемых. Условие минимума:

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{3}{2}p_0 S l_0 \left(\frac{l_0}{l}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{k}{2}\left(l - \frac{l_0}{2}\right)^2\right) = 0.$$

$$-p_0 S \left(\frac{l_0}{l}\right)^{5/3} + k\left(l - \frac{l_0}{2}\right) = 0.$$

С учётом $kl_0 = 2p_0 S$ получаем

$$\left(\frac{l_0}{l}\right)^{5/3} = \frac{2l}{l_0} - 1.$$

Единственное положительное решение, соответствующее равновесию, $l = l_0$ (левая часть убывает, правая возрастает).

При прохождении положения $l = l_0$:

$$U(l_0) = \frac{3}{2}p_0 S l_0, \qquad E_{\text{пр}}(l_0) = \frac{1}{4}p_0 S l_0.$$

Максимальная кинетическая энергия равна

$$E_{k,\max} = E_0 - \frac{7}{4}p_0 S l_0 = \frac{p_0 S l_0}{4}\left(6 \cdot 2^{2/3} - 7\right).$$

Модуль скорости цилиндра равен $\left|\dot{X}\right| = m\left|\dot{l}\right|/(m+M)$; следовательно,

$$V_{max} = \sqrt{\frac{m p_0 S l_0}{2M(m+M)}\left(6 \cdot 2^{2/3} - 7\right)} = 2{,}25 \text{ м/с}.$$

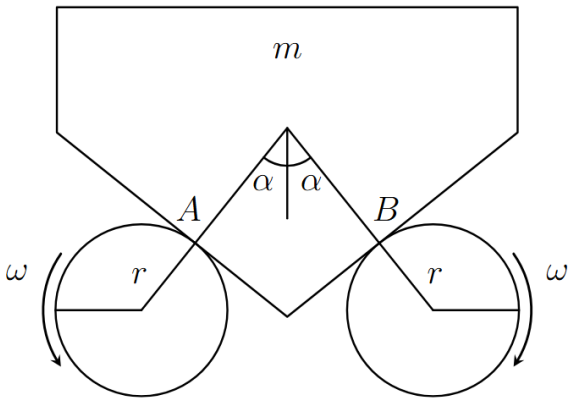
Матрица ответов к вариантам задания 2.

Вариант	Вопрос 1: U_0, Дж	Вопрос 2: $V_{\max}$, м/с
1	190	2,25
2	429	3,08
3	229	2,01
4	536	2,66
5	595	3,68

Задание № 3.

Транспортировка грузов

Груз массой $m = 5$ кг симметрично установлен на двух одинаковых параллельных цилиндрах радиуса $r = 10$ см, оси которых расположены в одной горизонтальной плоскости. Груз соприкасается с цилиндрами в точках A и B. Радиусы, проведённые к точкам контакта, образуют с вертикалью одинаковые углы $\alpha = 55°$.



Коэффициент трения скольжения между грузом и поверхностями цилиндров равен $\mu = 0{,}8$. Цилиндры могут вращаться вокруг своих осей с одинаковой по модулю угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с. Считайте, что груз остаётся симметрично расположенным относительно цилиндров.

К грузу прикладывают горизонтальную силу F, направленную вдоль осей цилиндров, заставляя его двигаться равномерно со скоростью $v_0 = 3{,}0$ м/с. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

В первой части задачи цилиндры вращаются в направлениях, показанных на рисунке.

Вопрос 1. Определите скорость V скольжения поверхности груза в точках касания с цилиндром относительно поверхности каждого цилиндра в точках контакта. Ответ дайте в метрах в секунду с точностью до сотых. (**3 балла**)

Вопрос 2. Пусть N – сила нормальной реакции, действующая на груз со стороны одного цилиндра, а N_0 – аналогичная сила, действующая в случае невращающихся цилиндров. Найдите отношение $n = \frac{N_0}{N}$. Ответ дайте с точностью до сотых. (**3 балла**)

Вопрос 3. Найдите величину силы F, которую необходимо прикладывать вдоль осей цилиндров, чтобы равномерно перемещать груз вдоль вращающихся цилиндров со скоростью v_0. Ответ дайте в ньютонах с точностью до десятых. (**4 балла**)

Теперь направления вращения обоих цилиндров изменяют на противоположные. Модули угловых скоростей остаются равными $\omega = 20$ рад/с.

Вопрос 4. Предполагая, что груз по-прежнему движется равномерно вдоль осей цилиндров в том же направлении со скоростью v_0, определите необходимую для поддержания подобного движения внешнюю силу F', направленную вдоль осей цилиндров. Ответ дайте в ньютонах с точностью до десятых. (**1 балл**)

Вопрос 5. При определённых значениях параметров системы движение груза становится невозможным в рамках рассматриваемой модели, поскольку силы трения неограниченно возрастают – возникает явление самозаклинивания. Какова минимально возможная скорость поступательного движения груза $v_{0,min}$? Ответ дайте в метрах в секунду с точностью до сотых. **(3 балла)**

Критерии оценивания: точное совпадение с ответом.

Максимальный балл за задание – 14 баллов.

Матрица параметров к вариантам задания 3.

Вариант	m, кг	r, см	α, °	μ	ω, рад/с	v_0, м/с
1	5	10	55	0,8	20	3
2	4	8	55	0,75	15	2,5
3	6	6	65	0,65	25	2,5
4	3	12	65	0,7	12	3
5	8	10	55	0,9	18	3,5

Решение:

1. Ось Ox направим горизонтально вправо (от левого цилиндра к правому), ось Oy – вертикально вверх, а ось Oz – вдоль осей цилиндров по направлению

вытягивания груза. Единичные векторы вдоль этих осей обозначим $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$. Скорость груза в таком случае равна

$$\vec{v}_0 = v_0\vec{k}.$$

Скорости поверхностей цилиндров в точках A и B равны соответственно

$$\vec{v}_A = -r\omega\cos\alpha\,\vec{\imath} + r\omega\sin\alpha\,\vec{\jmath},$$
$$\vec{v}_B = +r\omega\cos\alpha\,\vec{\imath} + r\omega\sin\alpha\,\vec{\jmath}.$$

Относительная скорость соприкасающихся поверхностей груза и цилиндра в точках контакта равна разности скоростей груза и поверхности:

$$\vec{v}_{\text{отн},A} = v_0\vec{k} + r\omega\cos\alpha\,\vec{\imath} - r\omega\sin\alpha\,\vec{\jmath},$$
$$\vec{v}_{\text{отн},B} = v_0\vec{k} - r\omega\cos\alpha\,\vec{\imath} - r\omega\sin\alpha\,\vec{\jmath}.$$

Модули обеих относительных скоростей одинаковы:

$$V = \left|\vec{v}_{\text{отн},A}\right| = \left|\vec{v}_{\text{отн},B}\right| = \sqrt{v_0^2 + r^2\omega^2} = 3{,}61\ \text{м/с},$$

поскольку $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

2. При скольжении сила трения направлена противоположно относительной скорости соответствующей точки груза:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu N\,\frac{\vec{v}_{\text{отн}}}{V},$$

где N – модуль нормальной реакции одного цилиндра. В силу симметрии реакции одинаковы. Отсюда

$$\vec{F}_{\text{тр},A} = \frac{\mu N}{V}\left(-r\omega\cos\alpha\,\vec{\imath} + r\omega\sin\alpha\,\vec{\jmath} - v_0\vec{k}\right),$$
$$\vec{F}_{\text{тр},B} = \frac{\mu N}{V}\left(+r\omega\cos\alpha\,\vec{\imath} + r\omega\sin\alpha\,\vec{\jmath} - v_0\vec{k}\right).$$

Вдоль Ox силы трения компенсируют друг друга. Их вертикальные составляющие одинаковы и направлены вверх, а продольные – против движения груза:

$$F_{\text{тр},y} = \frac{\mu N r\omega\sin\alpha}{V}, \qquad F_{\text{тр},z} = -\frac{\mu N v_0}{V}.$$

Груз движется равномерно, поэтому сумма сил по вертикали равна нулю. Следовательно,

$$2N\cos\alpha + 2F_{\text{тр}_y} - mg = 0.$$

Подставляем выражение для $F_{\text{тр}_y}$:

$$2N\left(\cos\alpha+\frac{\mu r\omega\sin\alpha}{V}\right)=mg.$$

Таким образом,

$$N=\frac{mgV}{2(V\cos\alpha+\mu r\omega\sin\alpha)},\text{ где }V=\sqrt{v_0^2+r^2\omega^2}.$$

При неподвижных цилиндрах ($\omega=0$) вертикальных составляющих сил трения нет:

$$2N_0\cos\alpha=mg,\qquad N_0=\frac{mg}{2\cos\alpha}.$$

Поскольку $\mu>0$, $\omega>0$ и $0<\alpha<\pi/2$, знаменатель выражения для N больше, чем $2V\cos\alpha$. Поэтому $N<N_0$: вращение частично поддерживает груз силами трения и уменьшает нормальные реакции. Искомое отношение:

$$n=\frac{N_0}{N}=\frac{\frac{mg}{2\cos\alpha}}{\frac{mgV}{2(V\cos\alpha+\mu r\omega\sin\alpha)}}=1+\frac{\mu r\omega}{\sqrt{v_0^2+r^2\omega^2}}\text{tg}\alpha=1{,}63.$$

3. На груз вдоль оси Oz действуют внешняя сила F и две одинаковые продольные составляющие трения $F_{\text{тр}_z}<0$. В соответствии со вторым законом Ньютона в проекции на Oz:

$$F+2F_{\text{тр}_z}=0,\qquad F=-2F_{\text{тр}_z}=\frac{2\mu Nv_0}{V}.$$

Подставим выражение для силы нормальной реакции опоры:

$$F=\frac{\mu mgv_0}{\sqrt{v_0^2+r^2\omega^2}\cos\alpha+\mu r\omega\sin\alpha}=35{,}5\text{ Н}.$$

4. Пусть теперь оба цилиндра вращаются в направлениях, противоположных показанным на рисунке. Модуль относительной скорости по-прежнему равен $V=\sqrt{v_0^2+r^2\omega^2}$, но вертикальные составляющие скоростей их поверхностей направлены вниз.

Следовательно, вертикальные составляющие сил трения тоже направлены вниз, а продольные, как и прежде, направлены в сторону, противоположную направлению действия внешней силы:

$$F_{\text{тр}}{}'_y=-\frac{\mu N'r\omega\sin\alpha}{V},\qquad F_{\text{тр}}{}'_z=-\frac{\mu N'v_0}{V}.$$

Обозначим новую нормальную реакцию каждого цилиндра через N'. Условие равновесия по вертикали:

$$2N'\cos\alpha+2F_{\text{тр}}{}'_y-mg=0.$$

Подставляя ${F_{\text{тр}}}'_y$ и выражая N', получаем

$$2N'\left(\cos\alpha - \frac{\mu r\omega\sin\alpha}{V}\right) = mg,$$

$$N' = \frac{mgV}{2(V\cos\alpha - \mu r\omega\sin\alpha)}.$$

Вдоль оси вытягивания выполняется $F' + 2{F_{\text{тр}}}'_z = 0$. Поэтому

$$F' = \frac{2\mu N'^{v_0}}{V} = \frac{\mu mgv_0}{\sqrt{v_0^2 + r^2\omega^2}\cos\alpha - \mu r\omega\sin\alpha} = 158{,}4 \text{ Н}.$$

5. Рассмотрим знаменатель выражения для модуля силы F'. Видим, что при некотором значении скорости $v_0 = v_{0,min}$ он обращается в нуль, то есть сила, необходимая для поддержания подобного движения, становится бесконечно большой, что и приводит к самозаклиниванию: силы нормальной реакции опоры со стороны цилиндров неограниченно увеличиваются, силы трения, как следствие, также неограниченно растут.

Условие самозаклинивания:

$$\sqrt{v_{0,min}^2 + r^2\omega^2}\cos\alpha - \mu r\omega\sin\alpha = 0,$$

откуда $v_{0,min}^2 + r^2\omega^2 = (\mu r\omega\text{tg}\alpha)^2$.

Тогда скорость, при которой происходит самозаклинивание:

$$v_{0,min} = r\omega\sqrt{\mu^2\text{tg}^2\alpha - 1} = 1{,}11 \text{ м/с}.$$

Матрица ответов к вариантам задания 3.

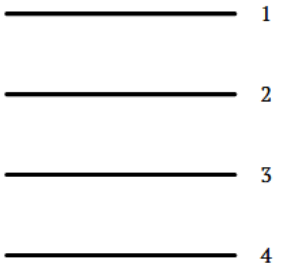
Вариант	**1: V, м/с**	**2: n, раз**	**3: F, Н**	**4: F', Н**	**5: $v_{0,min}$, м/с**
1	3,61	1,63	35,5	158,4	1,11
2	2,77	1,46	32,2	87,9	0,46
3	2,92	1,72	46,1	279,8	1,46
4	3,33	1,65	27,2	127,8	1,61
5	3,94	1,59	70,3	270,8	1,45

Задание № 4.

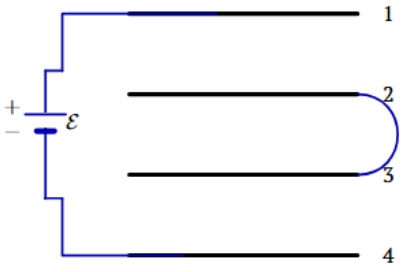
Пластины и перемычка

Четыре одинаковые незаряженные квадратные металлические пластины площадью $S = 100\text{ см}^2$ каждая расположены в вакууме горизонтально, параллельно друг другу. Расстояния между соседними пластинами равны

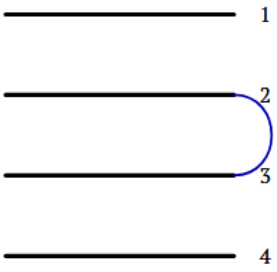
$d = 1{,}0$ мм. Пластины пронумерованы сверху вниз от 1 до 4. Электрическая постоянная равна $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Ф}}{\text{м}}$.



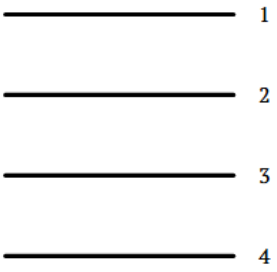
Пластины



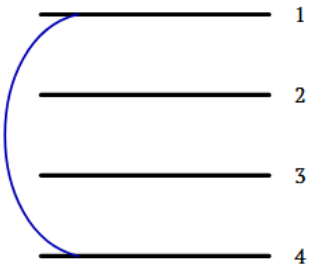
I. Подключены источник и перемычка



II. Источник отключён



III. Удалена перемычка



IV. Соединены 1 и 4

Над системой последовательно выполняют следующие действия.

I. Пластины 1 и 4 подключают к источнику постоянной ЭДС $\mathcal{E} = 600$ В (пластину 1 – к положительному полюсу), а пластины 2 и 3 соединяют проводником.

II. От пластин 1 и 4 отключают источник напряжения.

III. Проводник между пластинами 2 и 3 удаляют.

IV. Пластины 1 и 4 соединяют проводником и дожидаются установления равновесного распределения зарядов по пластинам.

При решении можете пренебречь краевыми эффектами и собственными ёмкостями соединительных проводов. Сами пластины остаются неподвижными. Обозначим φ_i – потенциал i-й пластины. Величину $U_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$ называют напряжением между i-й и j-й пластинами.

Вопрос 1. Найдите заряд q_1 первой пластины после действия I. Ответ дайте в нанокулонах с точностью до десятых. (**1 балл**)

Вопрос 2. Вычислите полную энергию $W_{\text{нач}}$ электрического поля системы после действия III. Ответ дайте в микроджоулях с точностью до десятых. (**1 балл**)

Вопрос 3. Найдите напряжение U_{34} после действия IV. Ответ дайте в вольтах с точностью до целого числа. (**1 балл**)

Вопрос 4. Найдите заряд Δq_{14}, прошедший по соединительному проводу от пластины 1 к пластине 4 за время действия IV. Ответ дайте в нанокулонах с точностью до десятых. (**1 балл**)

Вопрос 5. Определите модуль электростатической силы, действующей на пластину 1 после действия IV. Ответ дайте в миллиньютонах с точностью до сотых (**2 балла**)

Вопрос 6. Найдите изменение энергии $\Delta W = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}}$ электрического поля системы за время действия IV. Ответ дайте в микроджоулях с точностью до десятых. (**1 балл**)

Критерии оценивания: точное совпадение с ответом.

Максимальный балл за задание – 7 баллов.

Матрица параметров к вариантам задания 4.

Вариант	$\boldsymbol{S}$**, см²**	$\boldsymbol{d}$**, мм**	$\boldsymbol{\mathcal{E}}$**, В**
1	100	1,0	600
2	144	1,2	900
3	225	1,5	1200
4	196	2,0	1500
5	256	1,6	1800

Решение:

Обозначим ёмкость конденсатора, состоящего из двух пластин, как

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Для нахождения связи между зарядами пластин и напряжениями между ними запишем теорему Гаусса для i-й пластины. В качестве поверхности для нахождения потока вектора напряжённости электростатического поля возьмём прямоугольный параллелепипед с основаниями, расположенными между $i-1$-й и i-й пластинами и между $i+1$-й и i-й пластинами:

$$E_{i-1,i}S - E_{i,i+1}S = \frac{q_i}{\varepsilon_0},$$

где $E_{i-1,i}$ – напряжённость электростатического поля между $i-1$-й и i-й пластинами, $E_{i,i+1}$ – напряжённость электростатического поля между $i+1$-й и i-й пластинами, q_i – заряд i-й пластины. С учётом связи между напряжённостью

электростатического поля и напряжением между обкладками конденсатора:

$$E_{i-1,i} = \frac{U_{i-1,i}}{d}; \quad E_{i,i+1} = \frac{U_{i,i+1}}{d},$$

Получаем:

$$q_i = \frac{U_{i-1,i}}{d} S\varepsilon_0 - \frac{U_{i,i+1}}{d} S\varepsilon_0 = C\left(U_{i-1,i} - U_{i,i+1}\right).$$

Тогда заряды пластин:

$$q_1 = CU_{12}, q_4 = -CU_{34},$$
$$q_2 = C(U_{23} - U_{12}), q_3 = C(U_{34} - U_{23}).$$

1. После действия I пластины 2 и 3 соединены идеальным проводником, поэтому $U_{23} = 0$. Система эквивалентна двум одинаковым конденсаторам ёмкости C, включённым последовательно между пластинами 1 и 4.

В соответствии со вторым правилом Кирхгофа для цепи, содержащей ЭДС и два одинаковых конденсатора ($U_{12} = U_{34}$):

$$\mathcal{E} = 2U_{12}.$$

Откуда $U_{12} = \mathcal{E}/2$.

Заряд первой пластины:

$$q_1 = CU_1 = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}}{2d} = 26{,}6 \text{ нКл}.$$

2. При отключении источника не происходит изменения зарядов. Пока пластины 2 и 3 соединены, они образуют один изолированный проводник. После удаления провода каждая пластина оказывается изолированной со своим суммарным зарядом.

Из найденных напряжений следует:

$$q_1 = +\frac{C\mathcal{E}}{2}, \quad q_2 = -\frac{C\mathcal{E}}{2}, \quad q_3 = +\frac{C\mathcal{E}}{2}, \quad q_4 = -\frac{C\mathcal{E}}{2}.$$

До соединения крайних пластин напряжения остаются теми же. Полная энергия поля равна сумме энергий трёх плоских конденсаторов:

$$E_{\text{нач}} = \frac{C}{2}(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2).$$

Следовательно,

$$W_{\text{нач}} = \frac{C}{2}\left(\frac{\mathcal{E}^2}{4} + 0 + \frac{\mathcal{E}^2}{4}\right) = \frac{C\mathcal{E}^2}{4} = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2}{4d} = 8{,}0 \text{ мкДж}.$$

3. После действия IV выполняется условие $\varphi_1 = \varphi_4$, откуда следует, что

$$U_{12} + U_{23} + U_{34} = 0.$$

Пластины 2 и 3 теперь изолированы, поэтому их полные заряды сохраняются: $q_2 = -\frac{C\mathcal{E}}{2}$ и $q_3 = +\frac{C\mathcal{E}}{2}$. Воспользуемся соотношениями для зарядов каждой из пластин:

$$q_2 = C(U_{23} - U_{12}) = -\frac{C\mathcal{E}}{2}, \qquad q_3 = C(U_{34} - U_{23}) = +\frac{C\mathcal{E}}{2}.$$

Отсюда

$$U_{23} - U_{12} = -\frac{\mathcal{E}}{2}, \qquad U_{34} - U_{23} = \frac{\mathcal{E}}{2}.$$

Из системы уравнений для напряжений получаем:

$$U_{12} = \frac{\mathcal{E}}{6}, \quad U_{23} = -\frac{\mathcal{E}}{3}, \quad U_{34} = \frac{\mathcal{E}}{6}.$$

Искомое напряжение равно

$$U_{34} = \frac{\mathcal{E}}{6} = 100 \text{ В}.$$

4. После действия IV заряд пластины 1 становится равен

$$q_1^{\text{кон}} = CU_{12} = \frac{C\mathcal{E}}{6}.$$

До соединения этот заряд равнялся $q_1 = \frac{C\mathcal{E}}{2}$. Поэтому алгебраический заряд, прошедший по проводу от пластины 1 к пластине 4, равен

$$\Delta q_{1\to4} = q_1 - q_1^{\text{кон}} = \frac{C\mathcal{E}}{3} = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}}{3d} = 17{,}7 \text{ мкКл}.$$

5. После действия IV напряжённость однородного поля между пластинами 1 и 2 равна

$$E_{12} = \frac{U_{12}}{d} = \frac{\mathcal{E}}{6d}.$$

Полный заряд пластины 1 в приближении больших пластин сосредоточен на её нижней поверхности и равен $q_1^{\text{кон}} = \frac{C\mathcal{E}}{6}$. На неё действует поле остальных пластин, напряжённость которого вдвое меньше поля в промежутке:

$$E_{\text{внеш}} = E_{12}/2.$$

Модуль электростатической силы, действующей на пластину 1, равен

$$F = q_1^{\text{кон}} \frac{E_{12}}{2} = \frac{1}{2}\frac{C\mathcal{E}}{6}\frac{\mathcal{E}}{6d} = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2}{72d^2} \text{ 0,44 мН}.$$

6. Энергия поля после действия IV:

$$W_{\text{кон}} = \frac{C}{2}\left[\left(\frac{\mathcal{E}}{6}\right)^2 + \left(-\frac{\mathcal{E}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}}{6}\right)^2\right].$$

Следовательно,

$$W_{\text{кон}} = \frac{C\mathcal{E}^2}{12}.$$

Изменение энергии составляет

$$\Delta W = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = -\frac{C\mathcal{E}^2}{6} = -\frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2}{6d} = -5{,}3 \text{ мкДж}.$$

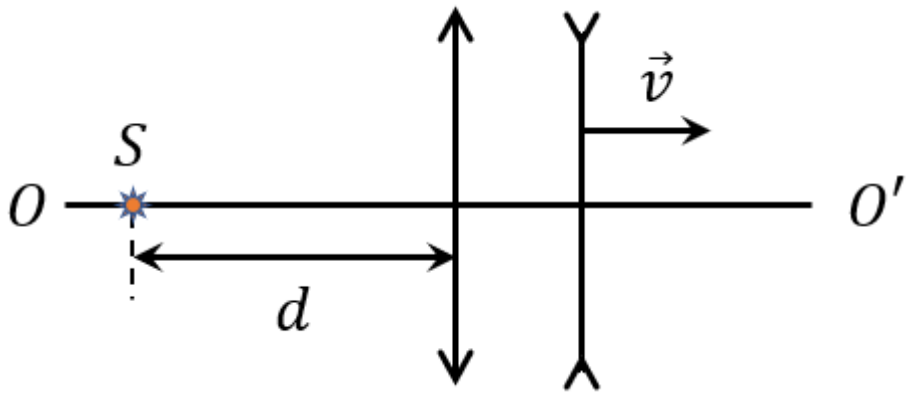
Матрица ответов к вариантам задания 4.

Вариант	**1: q_1, нКл**	**2: W, мкДж**	**3: U_{34}, В**	**4: Δq, нКл**	**5: F, мН**	**6: ΔW, мкДж**
1	26,6	8,0	100	17,7	0,44	−5,3
2	47,8	21,5	150	31,9	1,00	−14,3
3	79,7	47,8	200	53,1	1,77	−31,9
4	65,0	48,8	250	43,4	1,36	−32,5
5	127,4	114,7	300	85,0	3,98	−76,5

Задание № 5.

Система линз

Оптические оси собирающей и рассеивающей линз совпадают, их фокусные расстояния $F_1 = 70$ см и $F_2 = -50$ см соответственно. На оптической оси на расстоянии $d = 120$ см от собирающей линзы находится точечный источник света *S*. Изначально линзы плотно прижаты друг к другу. Рассеивающую линзу приводят в движение с постоянной скоростью $v = 2$ см/с.



Вопрос 1. На каком расстоянии f_1 от собирающей линзы находится изображение источника, создаваемое только собирающей линзой? Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целого числа. (**1 балл**)

Вопрос 2. Через какой промежуток времени Δt_1 после начала движения изображение источника в системе двух линз станет действительным? Ответ дайте в секундах с точностью до целого числа. (**1 балл**)

Вопрос 3. В течение какого промежутка времени Δt_2 изображение источника в системе двух линз будет действительным? Ответ дайте в секундах с точностью до целого числа. (**1 балл**)

Вопрос 4. Чему равен модуль скорости $|u|$ движения изображения источника в системе двух линз в момент, когда расстояние между линзами равно $l = 120$ см? Ответ дайте в см/с с точностью до целого числа. (**4 балла**)

Вопрос 5. Найдите минимальное расстояние между линзами l_{min}, при котором мгновенная скорость изображения в системе линз равна нулю. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целого числа. (**2 балла**)

Критерии оценивания: точное совпадение с ответом.

Максимальный балл за задание – 9 баллов.

Матрица параметров к вариантам задания 5.

Вариант	F_1**, см**	F_2**, см**	d**, см**	v**, см/с**	l**, см**
1	70	−50	120	2	120
2	30	−20	60	2	45
3	40	−30	80	2	60
4	30	−10	75	1	42
5	24	−18	40	2	48

Решение:

1. Пусть положительное направление оси Ox – вправо, а начало координат совмещено с оптическим центром неподвижной собирающей линзы. Предмет расположен в точке $x = -d = -60$ см.

Для первой линзы запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1},$$

где f_1 – расстояние от первой линзы до изображения. Отсюда

$$f_1 = \frac{F_1 d}{d - F_1} = 168 \text{ см}.$$

Поскольку $f_1 > 0$, изображение действительное и расположено справа от первой линзы на расстоянии 168 см.

2 - 3. Обозначим через d_2 расстояние от предмета для второй линзы с учётом знака (положительное для предмета слева от линзы), а через f_2 – расстояние от второй линзы до конечного изображения (положительное справа от неё).

Для второй линзы

$$d_2 = l - f_1.$$

По формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2}.$$

Из формулы тонкой линзы:

$$f_2 = \frac{F_2 d_2}{d_2 - F_2} = \frac{F_2(l - f_1)}{l - f_1 - F_2}.$$

Если $f_1 > -F_2$, действительное изображение существует при

$$f_1 + F_2 < l < f_1.$$

Отсюда при равномерном движении второй линзы со скоростью v :

$$\Delta t_1 = \frac{f_1 + F_2}{v} = 59 \text{ с},$$

$$\Delta t_2 = \frac{-F_2}{v} = 25 \text{ с}.$$

4. Координата изображения относительно первой линзы равна

$$x = l + f_2 = l + \frac{F_2(l - f_1)}{l - f_1 - F_2},$$

где $l = vt$.

Скорость изображения тогда:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dl}\frac{dl}{dt} = \left(1 + \frac{F_2(l - f_1 - F_2) - F_2(l - f_1)}{(l - f_1 - F_2)^2}\right)v = \left(1 - \frac{F_2^2}{(l - f_1 - F_2)^2}\right)v.$$

Подставим $l = 120$ см и $v = 2$ см/с:

$$|u| = 1248 \text{ см/с}.$$

5. Из условия $u = 0$ находим:

$$\left(1 - \frac{F_2^2}{(l - f_1 - F_2)^2}\right)v = 0.$$

Видим, что существует два значения l, удовлетворяющих условию задачи:

$$l - f_1 - F_2 = \pm F_2.$$

Искомое минимальное расстояние:

$$l_{min} = f_1 + 2F_2 = 68 \text{ см}.$$

Матрица ответов к вариантам задания 5.

Вариант	**1: f_1, см**	**2: Δt_1, с**	**3: Δt_2, с**	**4: u, см/с**	**5: $l_{\min}$, см**
1	168	59	25	1248	68
2	60	20	10	30	20
3	80	25	15	16	20
4	50	40	10	24	30
5	60	21	9	16	24