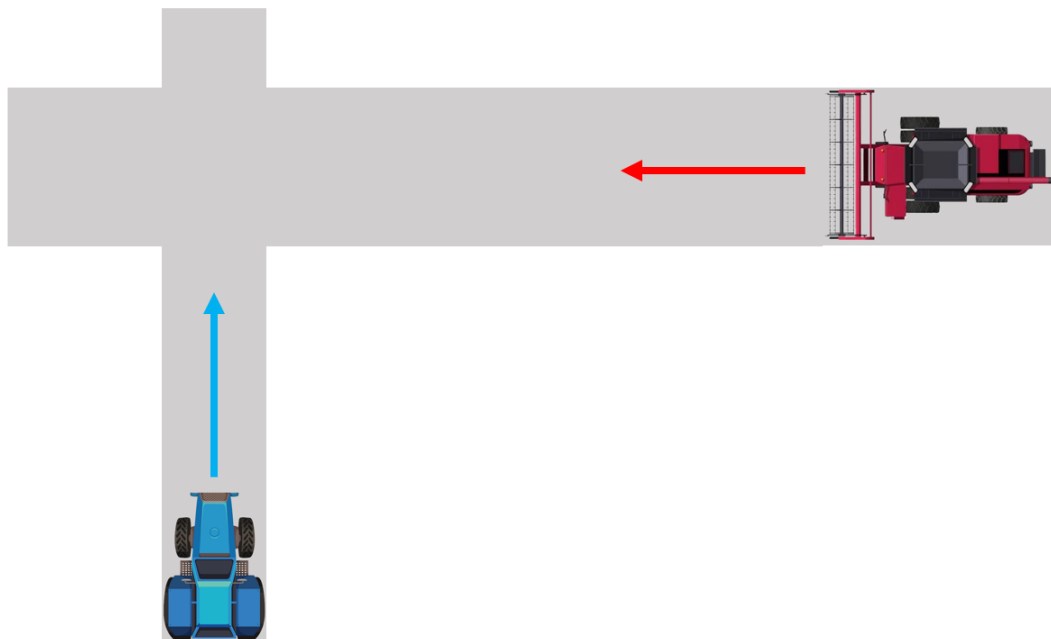


Максимальное количество баллов за олимпиаду — 30

Задание 1. Вариант 1. Синий трактор и красный комбайн едут с постоянными по модулю и направлению скоростями по прямым дорогам во взаимно перпендикулярных направлениях так, как показано стрелками на рисунке.



В момент $t = 0$ с синий трактор движется со скоростью $V_1 = 6$ м/с и находится на расстоянии $S_1 = 300$ м от перекрёстка дорог, а красный комбайн движется со скоростью $V_2 = 12$ м/с и находится на расстоянии $S_2 = 1500$ м от перекрёстка. Размерами машин и шириной дороги пренебречь.

а) Какая машина быстрее доедет до перекрёстка?

Ответ:

- ✓ Синий трактор
- Красный комбайн
- Одновременно

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

б) Определите расстояние между трактором и комбайном через 50 секунд от начала движения. Ответ выразите в метрах, округлите до целых.

Ответ: 900

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

в) В какой момент времени от начала движения расстояние между трактором и комбайном будет минимальным? Ответ выразите в секундах, округлите до целых.

Ответ: 110

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 4 балла

г) Определите минимальное расстояние между трактором и комбайном в процессе движения. Ответ выразите в метрах, округлите до целых.

Ответ: засчитывается в диапазоне [402; 403]

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

а) Синий трактор доедет до перекрёстка за $t_1 = \frac{S_1}{V_1} = \frac{300}{6} = 50$ с, а красный комбайн — за $t_2 = \frac{S_2}{V_2} = \frac{1500}{12} = 125$ с, следовательно, трактор быстрее.

б) Выберем систему координат с началом в перекрёстке. Ось y направим вдоль направления движения трактора, ось x — комбайна. Тогда координата y трактора меняется по закону $y(t) = S_1 - v_1 \cdot t = 300 - 6t$ и в момент времени 50 с $y = 0$, а координата x комбайна подчиняется закону $x(t) = S_2 - v_2 \cdot t = 1500 - 12t$ и в момент времени 50 с $x = 900$ м.

Расстояние между ними:

$$S = \sqrt{x^2 + y^2} = 900 \text{ м.}$$

в-г) Исследуем функцию расстояния на минимум. Подкоренное выражение в общем случае:

$$f(t) = (S_1 - v_1 t)^2 + (S_2 - v_2 t)^2, \\ f(t) = (v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(v_1 S_1 + v_2 S_2)t + (S_1^2 + S_2^2).$$

Минимум полученной квадратичной функции достигается в вершине, т.е. при

$$t_{\min} = \frac{v_1 S_1 + v_2 S_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

После подстановки значений из условия:

$$t_{\min} = \frac{6 \cdot 300 + 12 \cdot 1500}{6^2 + 12^2} = 110 \text{ с.}$$

В этот момент времени расстояние между объектами равно:

$$S_{\min} = \sqrt{f(t_{\min})} = \frac{|S_2 v_1 - S_1 v_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Подставим численные значения:

$$S_{\min} = \frac{|1500 \cdot 6 - 300 \cdot 12|}{\sqrt{36 + 144}} = 180\sqrt{5} \approx 402 \text{ м.}$$

Матрица параметров и ответов к вариантам задания 1.

№ варианта	S ₁ , м	V ₁ , м/с	S ₂ , м	V ₂ , м/с	Ответ (пункт а)	Время от начала движения, с	Ответ (пункт б)	Ответ (пункт в)	Ответ (пункт г)
1	300	6	1500	12	трактор	50	900	110	[402; 403]
2	330	6	1500	12	трактор	55	840	111	376
3	360	6	1500	12	трактор	60	780	112	349
4	390	6	1500	12	трактор	65	720	113	322

Задание 2. Вариант 1. От электростанции мощностью $P = 100$ МВт требуется передать энергию в город, находящийся на расстоянии $L = 50$ км. Линия электропередачи выполнена из алюминиевого провода сечением $S = 300$ мм². Напряжение на электростанции $U = 220$ кВ. Удельное сопротивление алюминия $\delta = 2.8 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м, плотность $\rho = 2700$ кг/м³, удельная теплоёмкость $c = 900$ Дж/(кг $\cdot$ °C). Температура окружающего воздуха $T_0 = 20$ °C. Примите $\pi \approx 3.14$.

а) Определите следующие величины. Ответы округляйте до десятых.

Ответ:

Сопротивление линии	9.3 Ом
Сила тока в линии	454.5 А
Мощность тепловых потерь	1.9 МВт

Критерий оценивания: за каждый верный ответ — 1 балл. Всего 3 балла

б) Определите КПД передачи энергии (отношение мощности, полученной городом, к мощности электростанции).

Ответ выразите в процентах, округлите до десятых.

Ответ: 98.1

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

в) На сколько градусов Цельсия нагреется провод линии за $t = 1$ час работы, если считать, что теплообмен с окружающей средой отсутствует? Ответ округлите до целых.

Ответ: 95

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

г) В реальной ситуации провод охлаждается в результате теплообмена с окружающей средой. Мощность теплоотдачи с единицы поверхности пропорциональна разности температур провода и воздуха: $\omega_{\text{отд } 1} = \alpha \cdot (T - T_0)$, где $\alpha = 10$ Вт/(м² $\cdot$ °C). Найдите установившуюся температуру провода. Ответ выразите в градусах Цельсия, округлите до целых.

Ответ: 51

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

а) Линия двухпроводная (туда и обратно), поэтому общая длина проводов составляет $l = 100$ км. Тогда сопротивление линии:

$$R = \frac{\delta l}{S} = 2.8 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{100000}{3 \cdot 10^{-4}} = \frac{28}{3} \approx 9.3 \text{ Ом.}$$

При передаче мощности P при напряжении U сила тока в линии определяется формулой

$$I = \frac{P}{U} = \frac{100 \cdot 10^6}{220 \cdot 10^3} \approx 454.5 \text{ А.}$$

Мощность тепловых потерь в линии (нагрев проводов) вычисляется по закону Джоуля–Ленца:

$$P_{\text{пот}} = I^2 R = \frac{P^2 R}{U^2} = \frac{(100 \cdot 10^6)^2 \cdot \left(\frac{28}{3}\right)}{(220 \cdot 10^3)^2} \approx 1.9284 \cdot 10^6 \text{ Вт} \approx 1.9 \text{ МВт.}$$

б) КПД передачи энергии определяется как отношение мощности, дошедшей до потребителя, к мощности, отданной электростанцией (согласно условию):

$$\eta = \frac{P - P_{\text{пот}}}{P}$$

Мощность, поступающая в город: $P_{\text{гор}} = P - P_{\text{пот}} = 100 - 1.9284 = 98.0716$ МВт. Тогда $\eta \approx 98.1$ %.

в) Если пренебречь отводом тепла в окружающую среду, всё выделившееся в проводах количество теплоты идёт на повышение их температуры. Найдём сначала массу проводов.

Длина одного провода $L = 50$ км = $5 \cdot 10^4$ м.

Площадь сечения провода $S = 3 \cdot 10^{-4}$ м².

Объём одного провода $V_1 = S \cdot L = 3 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^4 = 15$ м³.

Плотность алюминия $\rho = 2700$ кг/м³.

Поэтому масса одного провода $m_1 = \rho V_1 = 2700 \cdot 15 = 40500$ кг.

Линия состоит из двух проводов, общая масса $m = 2m_1 = 81000$ кг.

Теплота, выделившаяся в линии за время $t = 1$ час = 3600 с, $Q = P_{\text{пот}} \cdot t = \frac{P^2 R t}{U^2} \approx 6.942 \cdot 10^9$ Дж.

Изменение температуры проводов найдём из уравнения теплового баланса:

$$cm\Delta T = Q,$$

$$\Delta T = \frac{Q}{m \cdot c} = \frac{6.942 \cdot 10^9}{81000 \cdot 900} \approx 95 \text{ }^\circ\text{C}.$$

г) В реальной ситуации провод охлаждается за счёт конвекции и излучения. В условии задан упрощённый закон теплоотдачи: мощность теплоотдачи с единицы поверхности пропорциональна разности температур провода и окружающей среды. Для всего провода:

$$P_{\text{отд}} = w_{\text{отд}} S_{\text{пов}} = \alpha \cdot (T - T_0) S_{\text{пов}},$$

где $S_{\text{пов}}$ — полная площадь наружной поверхности проводов, $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, температура окружающего воздуха $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Определим площадь боковой поверхности проводов, где r — радиус провода:

$$S_{\text{пов}} = 4\pi rL = 4\pi L \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 4L\sqrt{\pi S}.$$

В установившемся режиме (когда провода перестают дальше нагреваться) мощность тепловых потерь из пункта выше равна мощности теплоотдачи:

$$P_{\text{пот}} = P_{\text{отд}} = \alpha \cdot (T - T_0) S_{\text{пов}},$$

тогда

$$T = T_0 + \frac{P_{\text{пот}}}{\alpha S_{\text{пов}}} = T_0 + \frac{P^2 R}{\alpha U^2 \cdot 4L\sqrt{\pi S}}.$$

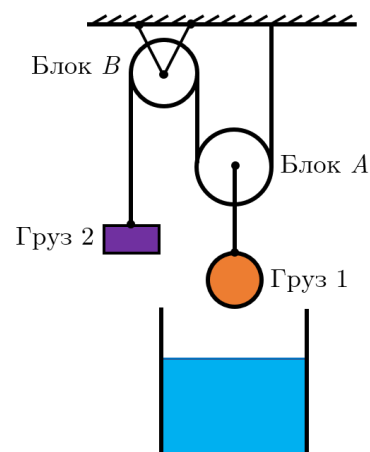
Подставим численные значения:

$$T = 20 + \frac{(100 \cdot 10^6)^2 \cdot \frac{28}{3}}{10 \cdot (220 \cdot 10^3)^2 \cdot 4 \cdot 50 \cdot 10^3 \sqrt{3.14 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}} \approx 51 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Матрица параметров и ответов к вариантам задания 2.

№ варианта	P, МВт	L, км	S, мм ²	U, кВ	T ₀ , °C	Ответ R, (пункт а)	Ответ I, (пункт а)	Ответ P _{пот} , (пункт а)	Ответ (пункт б)	Ответ (пункт в)	Ответ (пункт г)
1	100	50	300	220	20	9.3	454.5	1.9	98.1	95	51
2	110	65	300	220	20	12.1	500	3	97.2	115	58
3	120	45	300	220	20	8.4	545.5	2.5	97.9	137	65
4	130	55	300	220	20	10.3	590.9	3.6	97.2	161	73

Задание 3. Вариант 1. Конструкцию, изображённую на рисунке, удерживают так, чтобы грузы были неподвижными. Блоки считать невесомыми, нить — невесомой и нерастяжимой. Силу сопротивления жидкости не учитывать. Груз 1 — это сплошной шарик радиусом $R = 10$ см, плотность материала $\rho_{\text{ш}} = 5$ г/см³. Груз 2 имеет массу $m_2 = 1$ кг. Высота столба жидкости $h = 30$ см, плотность жидкости $\rho = 1$ г/см³, площадь дна сосуда $S = 500$ см². В расчётах принимайте $\pi \approx 3.14$, $g = 10$ м/с².



а) Чему равна масса шарика? Ответ выразите в килограммах, округлите до десятых.

Ответ: 20.9

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

б) В некоторый момент грузы отпускают, и они приходят в движение. Куда направлены ускорения шарика и груза 2?

В этом задании каждому варианту из левого столбца соответствует ровно один вариант из правого столбца. Ответы приведены ниже в нужном порядке.

Ответ:

Ускорение шарика	Вниз
Ускорение груза 2	Вверх

Критерий оценивания: за каждую верную пару — 1 балл. Всего — 2 балла

в) С каким ускорением движется шарик сразу после начала движения? Ответ выразите в м/с², округлите до десятых.

Ответ: 7.6

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

г) С каким ускорением движется в это время груз 2? Ответ выразите в м/с², округлите до десятых.

Ответ: 15.2

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

д) Невесомый блок А заменили на такой же по размеру блок массой $M = 0.5$ кг. Груз какой массы необходимо положить сверху на груз 2, чтобы шарик оказался в равновесии и погружён в жидкость на $\alpha = 1/2$ своего объёма? Ответ выразите в килограммах, округлите до десятых.

Ответ: 8.7

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

е) Чему в этом случае будет равна сила давления жидкости на дно сосуда? Атмосферное давление не учитывайте. Ответ выразите в ньютонах, округлите до целых.

Ответ: 171

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

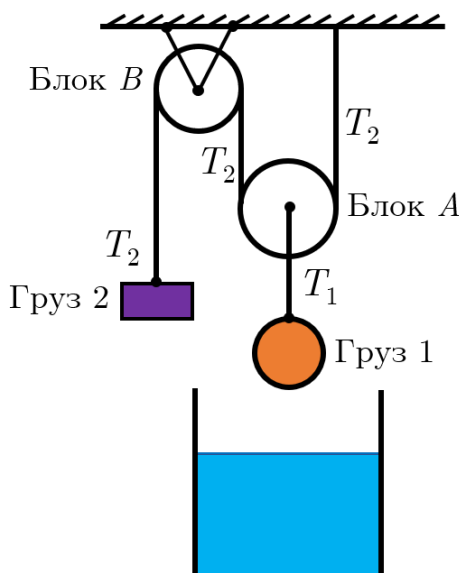
а) Объём шарика $V = \frac{4\pi R^3}{3} = 0.004187$ м³ = 4187 см³.

Масса шарика $m_1 = \frac{4\pi R^3 \rho_{\text{ш}}}{3} = \frac{62.8}{3} \approx 20.93$ кг.

б-г) На шарик до попадания в воду действуют сила тяжести $m_1 g$, направленная вниз, и сила натяжения нити T_1 , направленная вверх. Шарик приобретает ускорение a_1 .

На груз 2 действуют сила тяжести $m_2 g$, направленная вниз, и сила натяжения T_2 , направленная вверх. Груз 2 приобретает ускорение a_2 .

Блок А подвижный и невесомый, поэтому $2T_2 = T_1$. Так как нити нерастяжимы, модули ускорений грузов связаны друг с другом как $a_2 = 2a_1$, причём сами ускорения направлены в противоположные стороны.



Запишем второй закон Ньютона для шарика и груза в проекции на вертикальную ось x , направленную вниз:

$$\begin{aligned} m_1 g - T_1 &= m_1 a_{1x}; \\ m_2 g - T_2 &= m_2 a_{2x}, \end{aligned}$$

где a_{1x} и a_{2x} — проекции ускорений грузов на заданную ось. С учётом связи сил натяжения и ускорений ($2a_{1x} = -a_{2x}$), получим

$$\begin{aligned} m_1 g - 2T_2 &= m_1 a_{1x}; \\ T_2 - m_2 g &= 2m_2 a_{1x}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$a_{1x} = \frac{(m_1 - 2m_2)g}{4m_2 + m_1} = \frac{(20.93 - 2 \cdot 1) \cdot 10}{4 \cdot 1 + 20.93} \approx 7.6 \text{ м/с}^2.$$

Так как проекция вектора ускорения первого тела на ось, направленную вертикально вниз, положительна, вектор ускорения первого тела направлен вниз, а второго — вверх. Шарик опускается, а груз 2 — поднимается. И тогда $a_1 = 7.6 \text{ м/с}^2$, $a_2 = 2a_1 = 15.2 \text{ м/с}^2$.

д) Теперь рассмотрим ситуацию равновесия. Для шара, погруженного в жидкость на αV , можно записать: $F_A = \alpha \rho g V$. Запишем условие равновесия для груза 2 с добавочным грузом Δm : $T_2 = (\Delta m + m_2)g$;

$$\begin{aligned} \text{для весоного блока: } 2T_2 &= Mg + T_1; \\ \text{для шара: } T_1 + F_A &= m_1 g. \end{aligned}$$

Решим получившуюся систему уравнений, для чего выразим T_1 из последнего уравнения и подставим в предыдущее, чтобы выразить T_2 . Тогда для Δm получим

$$\begin{aligned} \Delta m &= \frac{1}{2} (M + m_1 - \alpha \rho V - 2m_2), \\ \Delta m &= \frac{1}{2} (0.5 + 20.93 - 0.5 \cdot 1000 \cdot 0.004187 - 2 \cdot 1) \approx 8.7 \text{ кг}. \end{aligned}$$

е) Осталось найти силу давления на дно сосуда.

Если бы шарик не был погружен в жидкость, сила давления на дно сосуда была бы равна $F_1 = \rho g h S$. Погруженный шарик увеличивает силу давления на дно сосуда.

Вспомним, что тело взаимодействует с жидкостью и что сила, с которой тело действует на жидкость, численно равна силе Архимеда, действующей на тело со стороны жидкости.

Тогда сила давления на дно сосуда

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_A, \\ F &= \rho g h S + \alpha \rho g V = 1000 \cdot 10 \cdot 0.3 \cdot 500 \cdot 10^{-4} + 0.5 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 0.004187 = 171 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Также можно ответить на данный вопрос, рассуждая другими способами. Например, можно определить, как изменится уровень жидкости в сосуде при погружении в него тела. Любое верное рассуждение приведёт к полученному выше ответу.

Матрица параметров и ответов к вариантам задания 3.

№ варианта	R, см	$\rho_{\text{ш}},$ г/см ³	m ₂ , кг	h, см	$\rho,$ г/см ³	S, см ²	M, кг	Ответ (пункт а)	Ответ (пункт в)	Ответ (пункт г)	Ответ (пункт д)	Ответ (пункт е)
1	10	5	1	30	1	500	0.5	20.9	7.6	15.2	8.7	171
2	10	4.8	1	12	0.8	450	0.5	20.1	7.5	15	8.5	60
3	8	5	1.2	20	0.8	450	0.5	10.7	5.4	10.7	4	81
4	12	5	1.2	30	1	500	0.5	36.2	8.2	16.5	15.3	186