ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2026–2027 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 10 КЛАСС

ОТВЕТЫ

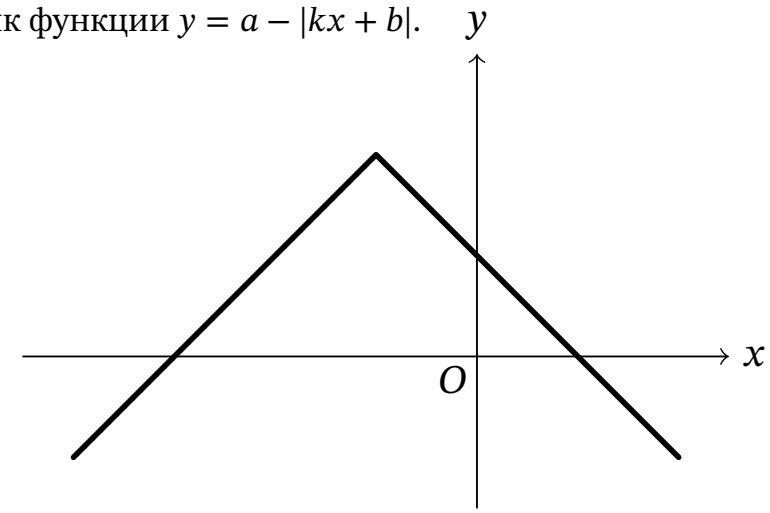
Максимальный балл за задание — 7. Максимальный балл за олимпиаду — 56

Задача 1

Всего 7 баллов. Если не указан один из ответов, то 3 балла.

Задача 1.1.

На рисунке изображён график функции $y = a - |kx + b|$.



К задаче 1.1

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;
3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Ответ: 1; 4.

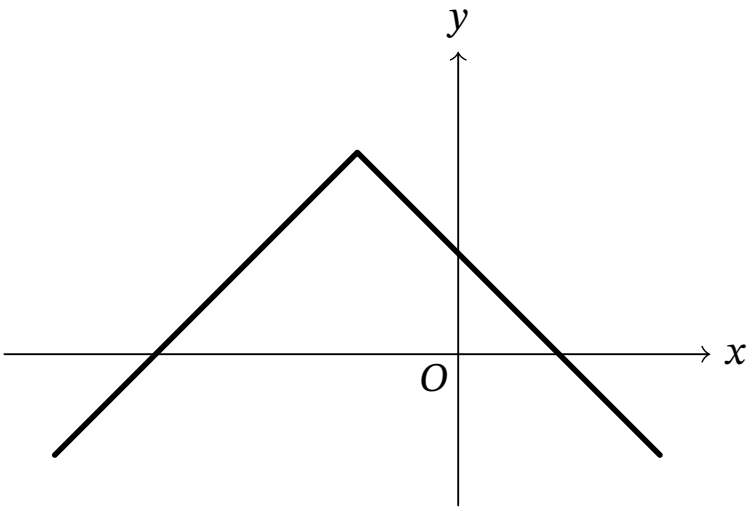
Решение. Так как $|kx + b|$ – величина неотрицательная, наибольшее значение функция $y = a - |kx + b|$ принимает, когда модуль равен 0, и это значение равно a. Значит, у вершины графика абсцисса находится из условия $kx + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{k}$, а ордината вершины равна a. Значит, $a > 0$ и $-\frac{b}{k} < 0$, то есть b и k – одного знака. Ясно, что оба соответствующих варианта подходят (например, указанный вид имеют графики функций $y = 2 - |x + 1|$ и $y = 2 - | - x - 1|$).

Вариант 1.2.

На рисунке изображён график функции $y = -a - |kx + b|$.

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;



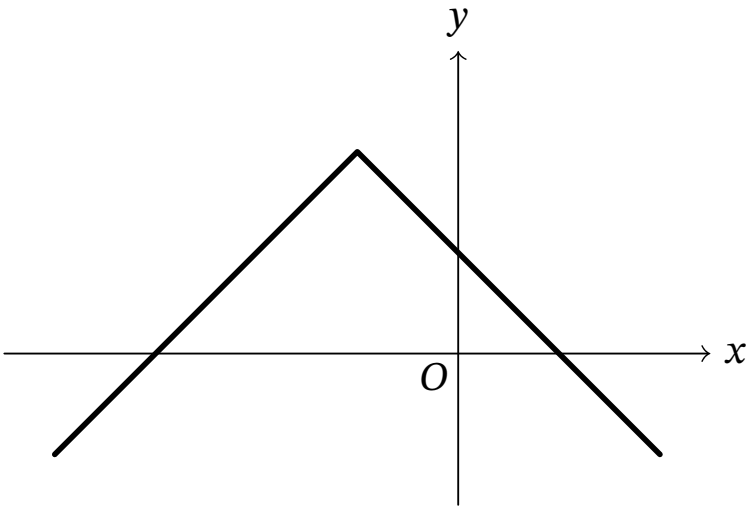
К задаче 1.2

3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Ответ: 5; 8.

Вариант 1.3.

На рисунке изображён график функции $y = a - |kx - b|$.



К задаче 1.3

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

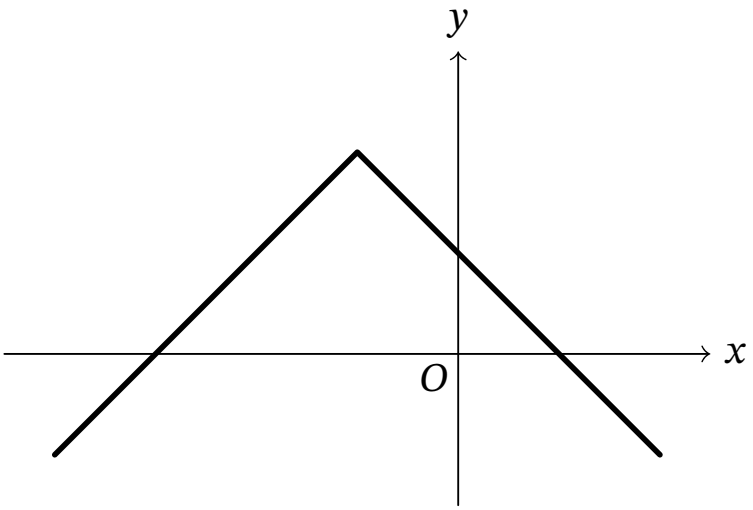
1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;

3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Ответ: 2; 3.

Вариант 1.4.

На рисунке изображён график функции $y = -a - |kx - b|$.



К задаче 1.4

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;
3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Ответ: 6; 7.

Задача 2

Всего 7 баллов. а) 2 балла за правильный ответ; б) 5 баллов за верный ответ; если не указан один из ответов, то 2 балла.

Задача 2.1.
Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 18$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 24$.

(а) Какие значения может принимать b?

(б) Какие значения может принимать a?

Ответ: **(а)** 8; **(б)** 4; 28.

Решение. **(а)** Характеристическое свойство арифметической прогрессии позволяет записать, что $a + c = 2b$. Подставляя в равенство для суммы чисел, имеем $a + b + c = 3b = 24$, откуда $b = \frac{24}{3} = 8$.
(б) Характеристическое свойство геометрической прогрессии позволяет записать, что $c^2 = 18b$, то есть $c^2 = 18 \cdot 8 = 144$, откуда $c = 12$ или $c = -12$. Тогда $a = 24 - b - c = 24 - 8 - 12 = 4$ в первом случае и $a = 24 - 8 - (-12) = 28$ во втором случае. Обе тройки чисел $(4; 8; 12)$ и $(28; 8; -12)$ удовлетворяют условию задачи. (Суммы чисел в них равны 24. В первом случае арифметическая прогрессия $4, 8, 12$ имеет разность 4, а геометрическая прогрессия $8, 12, 18$ имеет знаменатель $\frac{3}{2}$. Во втором случае арифметическая прогрессия $28, 8, -12$ имеет разность (-20), а геометрическая прогрессия $8, -12, 18$ имеет знаменатель $(-\frac{3}{2})$.)

Вариант 2.2. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 27$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 36$.

(а) Какие значения может принимать b?

(б) Какие значения может принимать a?

Ответ: **(а)** 12; **(б)** 6; 42.

Вариант 2.3. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 8$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 54$.

(а) Какие значения может принимать b?

(б) Какие значения может принимать a?

Ответ: **(а)** 18; **(б)** 24; 48.

Вариант 2.4. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 45$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 60$.

(а) Какие значения может принимать b?

(б) Какие значения может принимать a?

Ответ: **(а)** 20; **(б)** 10; 70.

Задача 3.1. На окружности отмечены 20 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 20. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Ответ: $\frac{4}{19}$.

Решение. Первый способ. Будем выбирать вершины по очереди. Первая вершина задаёт чётность номеров вершин. Вторая вершина будет иметь такую же чётность с вероятностью $\frac{9}{19}$ (всего вершин без первой – 19, из них той же чётности – 9). При условии, что вторая вершина имеет нужную чётность, третья вершина будет иметь её с вероятностью $\frac{8}{18}$ (всего вершин без первой и второй – 18, из них той же чётности – 8). Искомая вероятность равна $\frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{4}{19}$.

Второй способ. Всего треугольников с вершинами в отмеченных точках $C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2} = 1140$. Треугольников с вершинами одной чётности: $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$ с нечётными вершинами и столько же с нечётными, итого 240. Так как выбор каждого треугольника равновероятен, искомая вероятность равна отношению числа «удачных» исходов ко всем возможным, то есть $\frac{240}{1140} = \frac{4}{19}$.

Вариант 3.2. На окружности отмечены 12 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 12. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Ответ: $\frac{2}{11}$.

Вариант 3.3. На окружности отмечены 14 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 14. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Ответ: $\frac{5}{26}$.

Вариант 3.4. На окружности отмечены 18 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 18. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Ответ: $\frac{7}{34}$.

Задача 4
Всего 7 баллов. Если не указан один из ответов, то 3 балла.

Задача 4.1.
Найдите все натуральные числа n, для которых оба числа $n + 12$ и $n + 45$ являются точными квадратами.

Ответ: 4; 244.

Решение. Пусть $n + 45 = a^2$ и $n + 12 = b^2$, где a и b – целые числа. Тогда

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = (n + 45) - (n + 12) = 33.$$

Число $33 = 3 \cdot 11$ можно разложить в произведение двух целых множителей двумя принципиально разными способами (без учёта знаков и порядка):

$$(a + b)(a - b) = 33 = 3 \cdot 11 = 1 \cdot 33.$$

А с учётом знаков и порядка – восемью способами:

$$33 = 3 \cdot 11 = 1 \cdot 33 = 11 \cdot 3 = 33 \cdot 1 = (-3) \cdot (-11) = (-1) \cdot (-33) = (-11) \cdot (-3) = (-33) \cdot (-1),$$

из которых получим следующие восемь вариантов для значений a и b:

$$(a;b) = (\pm 7;\pm 4), (\pm 17;\pm 16).$$

(Например, для случая $3 \cdot 11$ имеем $a+b=3, a-b=11$, откуда

$$a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = \frac{3+11}{2} = 7 \text{ и } b = \frac{(a+b)-(a-b)}{2} = \frac{3-11}{2} = -4,$$

остальные случаи рассматриваются аналогично.) Первые четыре варианта соответствуют значению $n = 7^2 - 45 = 4$, другие четыре варианта – значению $n = 17^2 - 45 = 244$.

Вариант 4.2. Найдите все натуральные числа n, для которых оба числа $n+20$ и $n+59$ являются точными квадратами.

Ответ: 5; 341.

Вариант 4.3. Найдите все натуральные числа n, для которых оба числа $n+5$ и $n+32$ являются точными квадратами.

Ответ: 4; 164.

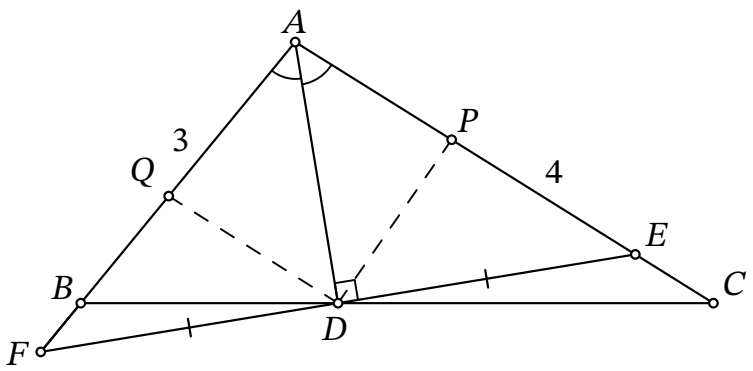
Вариант 4.4. Найдите все натуральные числа n, для которых оба числа $n+6$ и $n+61$ являются точными квадратами.

Ответ: 3; 723.

Задача 5.1. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 3$ и $AC = 4$ провели биссектрису AD. Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Ответ: $\frac{1}{7}$.

Решение. Так как $AC > AB$, ясно, что $\angle ADC = \angle ABD + \frac{\angle BAC}{2} > \angle ACD + \frac{\angle BAC}{2} = \angle ADB$, следовательно, $\angle ADC > 90^\circ > \angle ADB$, то есть точка E лежит на стороне AC, а точка F – на продолжении стороны AB за точку B. В треугольнике AFE биссектриса AD является также и высотой, поэтому этот треугольник равнобедренный ($AF = AE$), и AD является также медианой, то есть $ED = FD$. Дальше можно действовать по-разному.



Первый способ. Проведём через точку D прямые, параллельные AB и AC, до пересечения с AC и AB в точках P и Q соответственно. Так как в треугольнике AEF отрезок DP параллелен стороне AF и выходит из середины стороны EF, – это средняя линия, откуда $AP = PE$. По свойству биссектрисы треугольника имеем $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, а по теореме о пропорциональных отрезках имеем $\frac{AP}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}$. Следовательно, $\frac{EC}{AC} = 1 - \frac{2AP}{AC} = 1 - 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$. Аналогично, $\frac{AQ}{AB} = \frac{CD}{CB} = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}$ и $\frac{FB}{AB} = \frac{2AQ}{AB} - 1 = 2 \cdot \frac{4}{7} - 1 = \frac{1}{7}$. Наконец, $EC - FB = \frac{1}{7} \cdot (AC - AB) = \frac{1}{7} \cdot (4 - 3) = \frac{1}{7}$.

Второй способ. Пусть $EC = x, FB = y$. Используем теорему Менелая для треугольника AEF и прямой, содержащей точки B, D, C на прямых, содержащих его стороны:

$$\frac{AB}{BF} \cdot \frac{FD}{DE} \cdot \frac{EC}{CA} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{y} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{x}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{3}.$$

Используем теорему Менелая для треугольника ABC и прямой, содержащей точки E, D, F на прямых, содержащих его стороны (с учётом соотношения $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$):

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1 \Leftrightarrow \frac{4-x}{x} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{y}{3+y} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4-x}{3+y}.$$

Итак, $\frac{x}{y} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4-x}{3+y}$, откуда $4 - x = 3 + y \Leftrightarrow y = 1 - x$. Подставляя в $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, получим $x = \frac{4}{7}$, тогда $y = \frac{3}{7}$ и $EC - FB = x - y = \frac{1}{7}$.

Вариант 5.2. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$ и $AC = 5$ провели биссектрису AD. Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Вариант 5.3. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$ и $AC = 6$ провели биссектрису AD. Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Ответ: $\frac{1}{11}$.

Вариант 5.4. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 6$ и $AC = 7$ провели биссектрису AD. Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Ответ: $\frac{1}{13}$.

Задача 6.1. Последовательность задана условиями $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n.

(а) (5 баллов) Найдите a_{2026}.

(б) (2 балла) Найдите сумму первых 2026 членов последовательности.

Ответ: **(а)** $\frac{1}{3}$; **(б)** -588.

Решение. Посчитав первые несколько членов последовательности непосредственно, легко видеть, что она периодична с периодом 4: 2, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, -3, 2, $\frac{1}{3}$ и т. д. **(а)** Так как $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, член a_{2026} будет равен $a_2 = \frac{1}{3}$. **(б)** Сумма членов последовательности внутри одного цикла длины 4 равна $2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{6}$. Сумма первых 2026 членов –- это сумма 506 полных циклов и ещё двух следующих членов (2 и $\frac{1}{3}$), то есть $\left(-\frac{7}{6}\right) \cdot 506 + 2 + \frac{1}{3} = -588$.

Вариант 6.2. Последовательность задана условиями $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n.

(а) (5 баллов) Найдите a_{2030}.

(б) (2 балла) Найдите сумму первых 2030 членов последовательности.

Ответ: **(а)** $\frac{1}{2}$; **(б)** 595.

Вариант 6.3. Последовательность задана условиями $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n.

(а) (5 баллов) Найдите a_{2018}.

(б) (2 балла) Найдите сумму первых 2018 членов последовательности.

Ответ: **(а)** $\frac{3}{5}$; **(б)** 1357.

Вариант 6.4. Последовательность задана условиями $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n.

(а) (5 баллов) Найдите a_{2002}.

(б) (2 балла) Найдите сумму первых 2002 членов последовательности.

Ответ: **(а)** $\frac{2}{3}$; **(б)** 1989.

Задача 7.1. Имеется натуральное число N. Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N, не больших 100, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

Ответ: 35.

Решение. Покажем, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы тогда и только тогда, когда N – простое число или (натуральная) степень простого числа. Действительно, рассмотрим три случая.

I случай: $N = 1$. Тогда Алиса выписывает 1, и у Маруси нет хода.

II случай: $N = p^a$, где p – простое, $a \geqslant 1$. Тогда есть всего два вида возможных ходов: 1 и какая-то натуральная степень p. Один из таких ходов делает Алиса, второй – Маруся, и третий ход Алиса сделать не сможет.

III случай: N имеет хотя бы два различных простых делителя. Покажем, что Алиса сможет выиграть. Пусть Алиса выпишет произведение всех простых делителей числа N без какого-то одного p_i. Тогда останется всего два вида возможных ходов: 1 и какая-то натуральная степень p_i. Значит, следующим ходом Маруся сделает один из таких ходов, Алиса – другой, после чего Маруся сделать ход не сможет.

Осталось посчитать, сколько натуральных чисел, не превосходящих 100, являются простыми или натуральными степенями простых. Простых чисел – 25, квадратов простых – 4 ($2^2, 3^2, 5^2, 7^2$), кубов – 2 ($2^3, 3^3$), четвёртых степеней – 2 ($2^4, 3^4$), а также по одной пятой и шестой степени ($2^5, 2^6$). Всего 25+4+2+2+1+1=35 возможных значений N.

Вариант 7.2. Имеется натуральное число N. Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N, не больших 80, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

Ответ: 31.

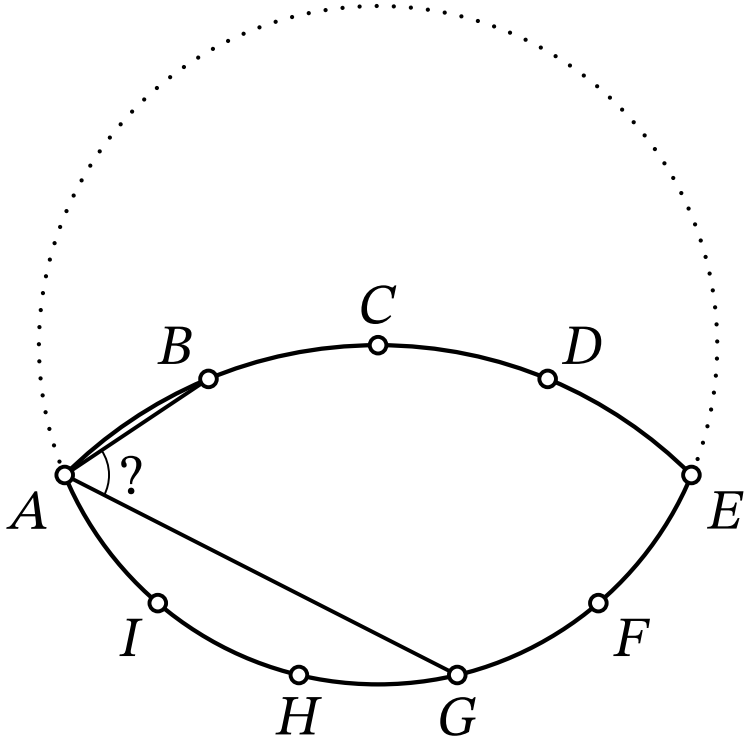
Вариант 7.3. Имеется натуральное число N. Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N, не больших 90, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

Ответ: 34.

Вариант 7.4. Имеется натуральное число N. Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N, не больших 110, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

Ответ: 39.

Задача 8.1. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 12°. Найдите градусную меру угла BAG.



К задаче 8.1

Ответ: 58.

Решение. Пусть градусные меры дуг первой окружности $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = x$ и градусные меры дуг второй окружности $\widehat{EF} = \widehat{FG} = \widehat{GH} = \widehat{HI} = \widehat{IA} = y$. Вычисляя величины вписанных углов ABD и AHG через градусные меры дуг, на которые они опираются, получим уравнение

$$\frac{360^\circ - 3x}{2} - \frac{360^\circ - 3y}{2} = 12^\circ,$$

откуда $y = x + 8^\circ$. Теперь заметим, что угол ACE является вписанным в первой окружности и центральным – во второй, что позволяет вычислить его величину двумя способами:

$$\angle ACE = \frac{360^\circ - 4x}{2} = 5y,$$

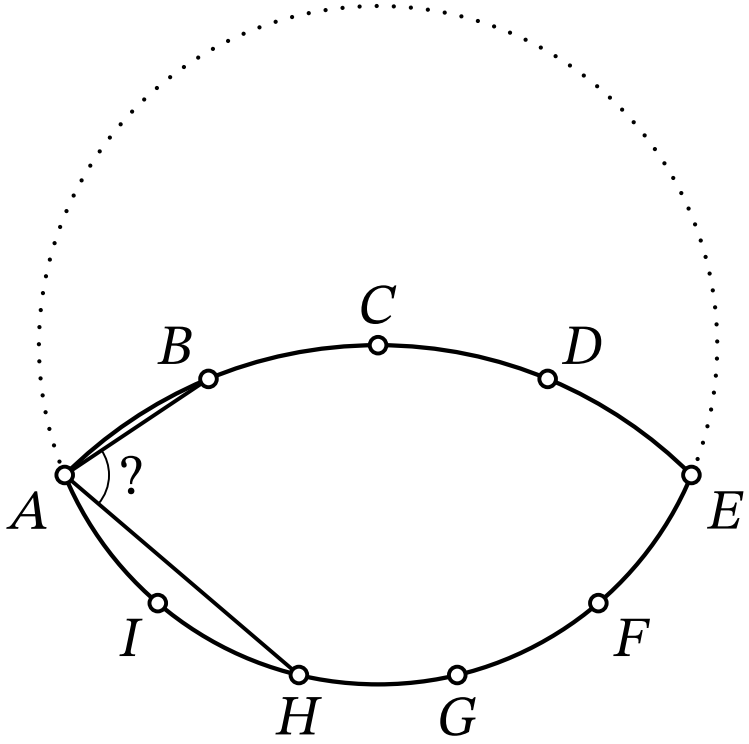
откуда $2x + 5y = 180^\circ$. Получили систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} y = x + 8^\circ, \\ 2x + 5y = 180^\circ. \end{cases}$$

Решая её, находим $x = 20^\circ$, $y = 28^\circ$. Наконец,

$$\angle BAG = \angle BAE + \angle EAG = \frac{3x}{2} + \frac{2y}{2} = \frac{3}{2} \cdot 20^\circ + 28^\circ = 58^\circ.$$

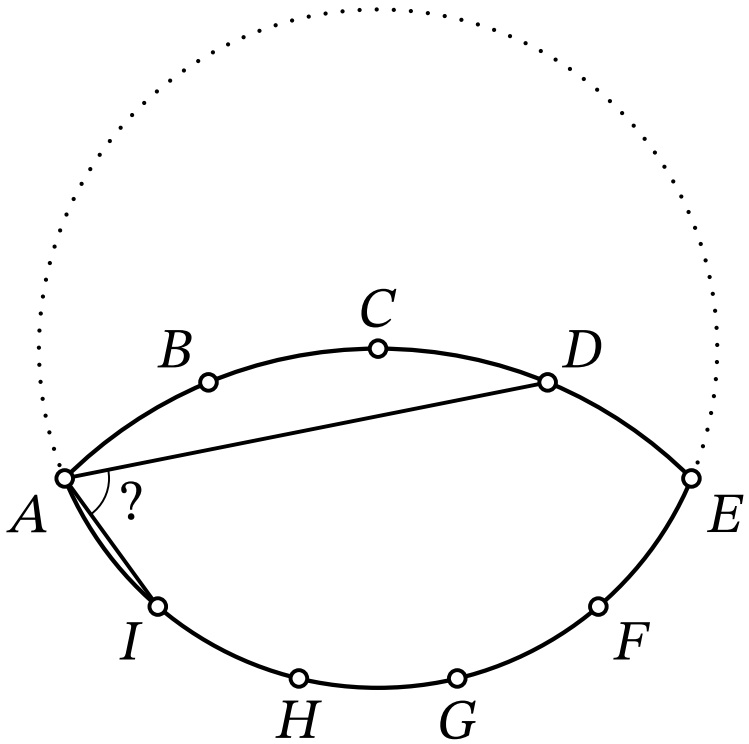
Вариант 8.2. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 5°. Найдите градусную меру угла BAH.



К задаче 8.2

Ответ: 75.

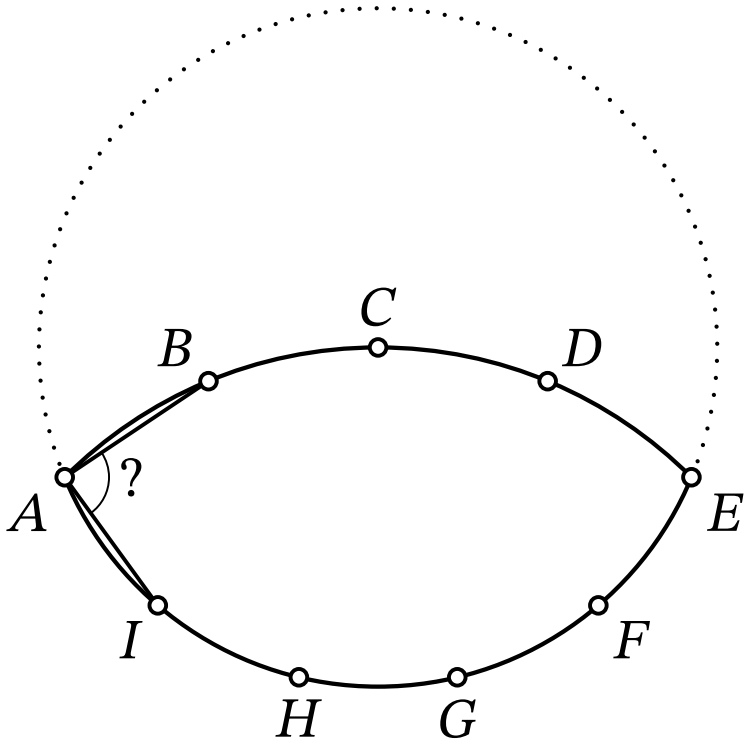
Вариант 8.3. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 19°. Найдите градусную меру угла DAI.



К задаче 8.3

Ответ: 67.

Вариант 8.4. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 9°. Найдите градусную меру угла BAI.



К задаче 8.4

Ответ: 87.