ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2026–2027 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС

ОТВЕТЫ

Максимальный балл за задание — 7. Максимальный балл за олимпиаду — 56

Задача 1.1. При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2+5n)^\circ)\cdot\cos((n^2+5n)^\circ)<0?$$

Ответ: 8.

Решение. Неравенство выполнено тогда и только тогда, когда $\sin((n^2+5n)^\circ)$ и $\cos((n^2+5n)^\circ)$ имеют разные знаки, то есть когда

$$90+360k<n^2+5n<180+360k$$

или

$$270+360k<n^2+5n<360+360k$$

при некотором целом k. При монотонном увеличении n от 1 до бесконечности значение выражения n^2+5n монотонно увеличивается от 6 до бесконечности. Так как $0<7^2+5\cdot 7=84<90$ и $90<8^2+5\cdot 8=104<180$, искомое минимальное натуральное n равно 8.

Вариант 1.2. При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2+3n)^\circ)\cdot\cos((n^2+3n)^\circ)<0?$$

Ответ: 9.

Вариант 1.3. При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2+7n)^\circ)\cdot\cos((n^2+7n)^\circ)<0?$$

Ответ: 7.

Вариант 1.4. При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2+11n)^\circ)\cdot\cos((n^2+11n)^\circ)<0?$$

Ответ: 6.

Задача 2.1. Последовательность задана условиями

$$a_1=1,\qquad a_{n+1}=\frac{a_n}{1+3a_n}\quad\text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{100}.

Ответ: 1/298

Решение. Докажем по индукции, что $a_n=\dfrac{1}{3n-2}$. База для $n=1$ верна. Пусть $a_k=\dfrac{1}{3k-2}$. Тогда $a_{k+1}=\dfrac{a_k}{1+3a_k}=\dfrac{\frac{1}{3k-2}}{1+\frac{3}{3k-2}}=\dfrac{1}{3k-2+3}=\dfrac{1}{3(k+1)-2}$, — переход доказан. Тогда $a_{100}=1/(3\cdot 100-2)=1/298$.

Вариант 2.2. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n} \quad \text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{200}.

Ответ: 1/598

Вариант 2.3. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n} \quad \text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{250}.

Ответ: 1/748

Вариант 2.4. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n} \quad \text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{150}.

Ответ: 1/448

Задача 3.1. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 15, а их медиана равна 18. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Ответ: 35

Решение. Пусть в нашем наборе числа $a < b < 18 < c < d$. Т.к. их среднее арифметическое 15, то сумма равна $15 \cdot 5 = 75$. Также $a \geqslant 1, b \geqslant 2, c \geqslant 19$. Тогда $d = 75 - a - b - 18 - c \leqslant 75 - 1 - 2 - 18 - 19 = 35$. Набор чисел $\{1; 2; 18; 19; 35\}$ даёт нужный пример.

Вариант 3.2. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 20, а их медиана равна 23. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Ответ: 50

Вариант 3.3. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 17, а их медиана равна 20. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Ответ: 41

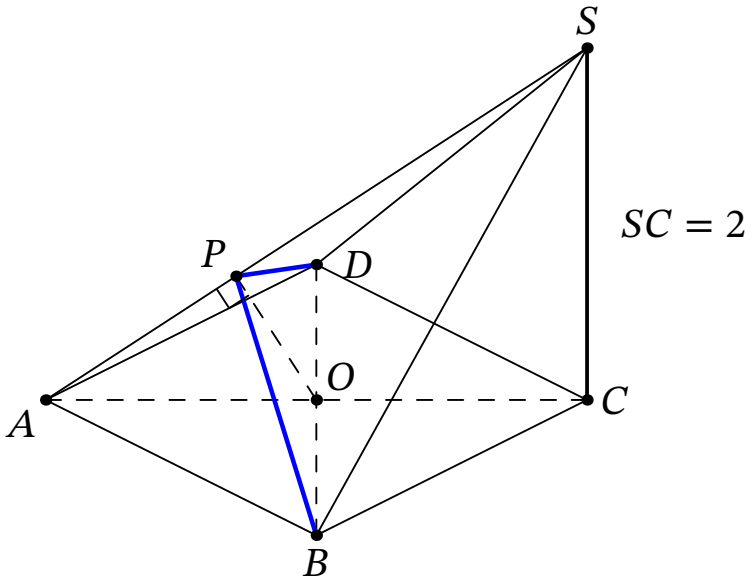
Вариант 3.4. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 22, а их медиана равна 25. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Ответ: 56

Задача 4.1. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 4, а $SC = 2$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS. Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP.

Ответ: 8/3

Решение. Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Т.к. SC — высота пирамиды, то $\angle SCB = \angle SCD = 90°$, поэтому $\triangle SCB = \triangle SCD$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда $SB = SD$. Теперь треугольники SBA и SDA равны по трём сторонам, поэтому $\angle BSA = \angle DSA$. Наконец, $\triangle SBP = \triangle SDP$ по двум сторонам и углу, поэтому $BP = DP$. Т.к. треугольник BPD — равнобедренный, то его медиана PO является также и высотой, поэтому площадь $S_{BPD} = \frac{1}{2} PO \cdot BD$ принимает наименьшее значение, когда PO принимает наименьшее значение, т.е. PO — расстояние от O до AS.



К решению задачи 4.1

Значит, P — основание перпедикуляра, опущенного из O на AS. Тогда треугольники OPA и SCA подобны по двум углам, и $\frac{OP}{SC} = \frac{OA}{SA}$, $PO = \frac{SC \cdot OA}{SA}$. Сделаем расчёты: $AC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$, $SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} = 6$, $OA = \frac{1}{2}BD = 2\sqrt{2}$. Итак, наименьшая площадь $S_{BDP} = \frac{1}{2} PO \cdot BD = \frac{SC \cdot OA \cdot BD}{2SA} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2 \cdot 6} = \frac{8}{3}$.

Вариант 4.2. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 10, а $SC = 5$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS. Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP.

Ответ: 50/3

Вариант 4.3. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 2, а $SC = 1$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS. Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP.

Ответ: 2/3

Вариант 4.4. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 8, а $SC = 4$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS. Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP.

Ответ: 32/3

Задача 5

Всего 7 баллов. Если не указан один из ответов, то 3 балла.

Задача 5.1.

Для каких натуральных значений m уравнение $x^2 - (m+5)x + 3m = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Ответ: $m = 2$, $m = 6$

Решение. Пусть натуральные корни уравнения — a и b. По теореме Виета

$$a + b = m + 5, \qquad ab = 3m.$$

Умножим первое равенство на 3 и воспользуемся вторым:

$$3a + 3b = 3m + 15 = ab + 15.$$

Отсюда

$$(a-3)(b-3) = ab - 3a - 3b + 9 = -6.$$

Так как a и b — натуральные числа, оба множителя не меньше -2. Их произведение отрицательно, поэтому один множитель отрицателен, а другой положителен. Считая, что $a \leqslant b$, получаем два варианта:

$$a - 3 = -2, \quad b - 3 = 3, \qquad \text{или} \qquad a - 3 = -1, \quad b - 3 = 6.$$

Значит, корни могут быть только $(a, b) = (1, 6)$ или $(a, b) = (2, 9)$.

Для пары $(1, 6)$ сумма корней равна 7, поэтому $m + 5 = 7$ и $m = 2$. Для пары $(2, 9)$ сумма равна 11, поэтому $m + 5 = 11$ и $m = 6$.

Оба значения подходят.

Вариант 5.2. Для каких натуральных значений m уравнение $x^2 - (m+6)x + 4m = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Ответ: $m = 4$, $m = 9$

Вариант 5.3. Для каких натуральных значений m уравнение $x^2 - (m+7)x + 5m = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Ответ: $m = 6$, $m = 12$

Вариант 5.4. Для каких натуральных значений m уравнение $x^2 - (m+9)x + 7m = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Ответ: $m = 10$, $m = 18$

Задача 6.1. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×100. Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 99 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

Ответ: 396

Решение. В каждом двухклеточном столбике закрашено не более одной клетки. Всего столбиков 100, а клеток закрашено 99, поэтому один столбик пустой, а в остальных ровно по одной закрашенной клетке. Если пустой столбик — один из двух крайних, то в оставшемся прямоугольнике 2×99 есть два способа закрасить клетки. Действительно, как только мы закрашиваем клетку в одном из столбиков (верхнюю или нижнюю), в соседних столбиках закрашенная клетка определяется однозначно (она должна лежать в другой строке, чтобы не быть соседней с первой), потом однозначно определяются закрашенные клетки в столбиках через один и т.д. Если же пустой столбик один из 98 некрайних, то наш прямоугольник разбивается на два меньших вида $2 \times k$, каждый из которых снова может быть закрашен двумя способами. Тогда всего способов $2 \cdot 2 + 98 \cdot 2 \cdot 2 = 99 \cdot 4 = 396$.

Вариант 6.2. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×120. Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 119 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

Ответ: 476

Вариант 6.3. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×80. Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 79 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

Ответ: 316

Вариант 6.4. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×140. Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 139 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

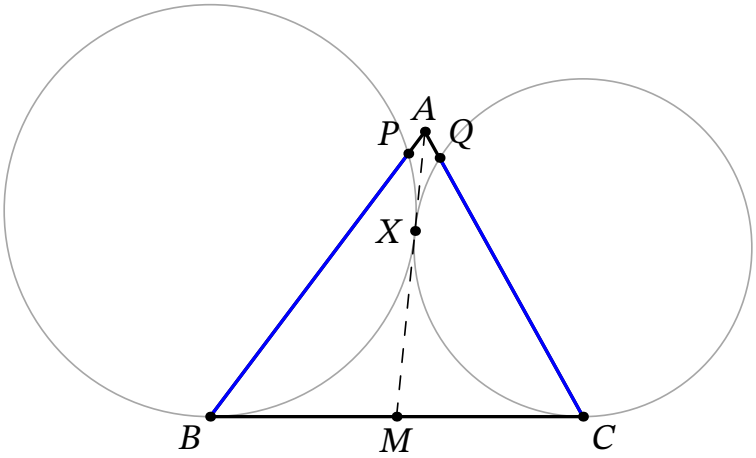
Ответ: 556

Задача 7.1. В треугольнике ABC $\angle ABC = 53°$, $\angle BAC = 66°$. Точка M является серединой стороны BC. Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM, пересекает сторону AB в точке P. Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM, пересекает сторону AC в точке Q. Найдите угол APQ. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 61°

Решение. Если первая окружность касается отрезка AM в точке X, а вторая — в точке Y, то $MX = MB$ и $MY = MC$ как равные отрезки касательных, а значит $MX = MY$ и, точки X, Y совпадают.

По теореме о секущей и касательной для первой окружности $AP \cdot AB = AX^2$, а для второй — $AQ \cdot AC = AX^2$, т.е. $AP \cdot AB = AQ \cdot AC$, откуда следует, что четырёхугольник $PQCB$ вписан. Значит, $\angle APQ = \angle QCB = 180° - \angle ABC - \angle BAC = 61°$.



К решению задачи 7.1

Вариант 7.2. В треугольнике ABC $\angle ABC = 57°$, $\angle BAC = 65°$. Точка M является серединой стороны BC. Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM, пересекает сторону AB в точке P. Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM, пересекает сторону AC в точке Q. Найдите угол APQ. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 58°

Вариант 7.3. В треугольнике ABC $\angle ABC = 54°$, $\angle BAC = 67°$. Точка M является серединой стороны BC. Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM, пересекает сторону AB в точке P. Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM, пересекает сторону AC в точке Q. Найдите угол APQ. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 59°

Вариант 7.4. В треугольнике ABC $\angle ABC = 55°$, $\angle BAC = 63°$. Точка M является серединой стороны BC. Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM, пересекает сторону AB в точке P. Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM, пересекает сторону AC в точке Q. Найдите угол APQ. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 62°

Задача 8.1. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n + 1) = 8^n + 1$ для $n = 1, 2, 3, 4$. Найдите $P(1)$.

Ответ: 1025

Решение. Заметим, что многочлен $Q(x) = (x-1)^3 + 1$ удовлетворяет условию $Q(2^n + 1) = 8^n + 1$ для любого n. Тогда в точках $3, 5, 9, 17$ многочлен $P(x) - Q(x)$ принимает значение 0. Значит, эти числа — его корни, и $P(x) - Q(x)$ имеет вид $(x-3)(x-5)(x-9)(x-17)T(x)$, где $T(x)$ — некоторый многочлен. Учитывая, что $P(x)$ четвёртой степени и приведённый, получаем, что $P(x) - Q(x) = (x-3)(x-5)(x-9)(x-17)$ и $P(x) = (x-1)^3 + 1 + (x-3)(x-5)(x-9)(x-17)$. Тогда $P(1) = 1 + (-2)(-4)(-8)(-16) = 1025$.

Вариант 8.2. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n + 1) = 8^n + 1$ для $n = 0, 2, 3, 4$. Найдите $P(1)$.

Ответ: 513

Вариант 8.3. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n+1) = 8^n + 1$ для $n = 0, 1, 2, 4$. Найдите $P(1)$.

Ответ: 129

Вариант 8.4. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n+1) = 8^n + 1$ для $n = 0, 1, 2, 5$. Найдите $P(1)$.

Ответ: 257