ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2026–2027 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 7 КЛАСС
ОТВЕТЫ

Максимальный балл за задание — 7. Максимальный балл за олимпиаду — 56

Задача 1.1. Куб $3\times3\times3$ составлен из единичных кубиков. Из него вынули кубик, находившийся в середине одного из рёбер большого куба. Затем всю поверхность получившегося тела, включая четыре новые квадратные грани выемки, покрасили, после чего тело разобрали на единичные кубики.

Сколько кубиков имеют ровно 2 окрашенные грани?

Ответ: 13

Решение. До удаления кубика у большого куба было 12 кубиков ровно с двумя окрашенными гранями: это средние кубики его рёбер. Один из них вынули, поэтому осталось 11 таких кубиков.

С выемкой граничат четыре кубика. Два из них угловые; после покраски у каждого из них будет по четыре окрашенные грани. Два других раньше имели по одной окрашенной грани, а теперь получили ещё по одной. Значит, к 11 кубикам добавились ещё два. Итого $11 + 2 = 13$.

Вариант 1.2. Куб $4\times4\times4$ составлен из единичных кубиков. Из него вынули один из двух кубиков, не являющихся угловыми и находящихся на одном ребре большого куба. Затем всю поверхность получившегося тела, включая четыре новые квадратные грани выемки, покрасили, после чего тело разобрали на единичные кубики. Сколько кубиков имеют ровно 2 окрашенные грани?

Ответ: 24.

Вариант 1.3. Куб $3\times3\times3$ составлен из единичных кубиков. Из него вынули кубик, находившийся в центре одной из граней большого куба. Затем всю поверхность получившегося тела, включая пять новых квадратных граней выемки, покрасили, после чего тело разобрали на единичные кубики. Сколько кубиков имеют ровно 2 окрашенные грани?

Ответ: 8.

Вариант 1.4. Куб $4\times4\times4$ составлен из единичных кубиков. Из него вынули один из четырёх кубиков, не примыкающих к рёбрам и находящихся на одной грани большого куба. Затем всю поверхность получившегося тела, включая пять новых квадратных граней выемки, покрасили, после чего тело разобрали на единичные кубики. Сколько кубиков имеют ровно 2 окрашенные грани?

Ответ: 24.

Задача 2.1. Только в одной из четырёх коробок A, B, C, D лежит ключ. На коробках написано следующее:

A: «Ключ не в коробке A»;

B: «Ключ в коробке A или C»;

C: «Ключ не в коробке *B*»;

D: «Ключ в коробке *D*».

Известно, что ровно одна из этих надписей истинна. В какой коробке находится ключ?

Ответ: Ключ в коробке *B*.

Решение. Проверим все четыре возможных положения ключа. Если ключ лежит в *A*, истинны надписи на *B* и *C*. Если ключ лежит в *B*, истинна только надпись на *A*. Если ключ лежит в *C*, истинны надписи на *A*, *B* и *C*. Наконец, если ключ лежит в *D*, истинны надписи на *A*, *C* и *D*.

Ровно одна надпись истинна лишь во втором случае, поэтому ключ находится в коробке *B*.

Вариант 2.2. Только в одной из четырёх коробок *A*, *B*, *C*, *D* лежит ключ. На коробках написано следующее:

A: «Ключ в коробке *A*»;

B: «Ключ не в коробке *B*»;

C: «Ключ в коробке *B* или *D*»;

D: «Ключ не в коробке *C*».

Известно, что ровно одна из этих надписей истинна. В какой коробке находится ключ?

Ответ: Ключ в коробке *C*.

Вариант 2.3. Только в одной из четырёх коробок *A*, *B*, *C*, *D* лежит ключ. На коробках написано следующее:

A: «Ключ не в коробке *D*»;

B: «Ключ в коробке *B*»;

C: «Ключ не в коробке *C*»;

D: «Ключ в коробке *A* или *C*».

Известно, что ровно одна из этих надписей истинна. В какой коробке находится ключ?

Ответ: Ключ в коробке *D*.

Вариант 2.4. Только в одной из четырёх коробок *A*, *B*, *C*, *D* лежит ключ. На коробках написано следующее:

A: «Ключ в коробке *B* или *D*»;

B: «Ключ не в коробке *A*»;

C: «Ключ в коробке *C*»;

D: «Ключ не в коробке *D*».

Известно, что ровно одна из этих надписей истинна. В какой коробке находится ключ?

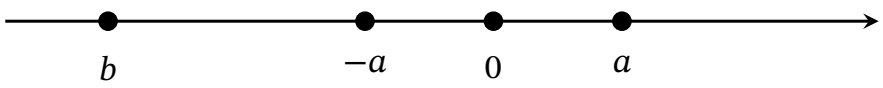
Ответ: Ключ в коробке *A*.

Задача 3.

Всего 7 баллов. Если не указан один из ответов, то 5 баллов.

Задача 3.1. На числовой оси отмечены точки, соответствующие числам b, $-a$ и a (см. рис.). Какие утверждения верны? Выберите все подходящие варианты:

1. $ab > 0$;
2. $a + b < 0$;
3. $\frac{a}{b} < 0$;
4. $a - b > 0$;
5. $a + 2b > 0$;
6. $b(a - b) < 0$.



К задаче 3.1

Ответ: 2, 3, 4, 6.

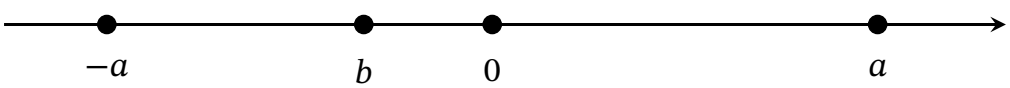
Решение. По рисунку

$$b < -a < 0 < a.$$

Поэтому $ab < 0$, $a + b < 0$, $\frac{a}{b} < 0$ и $a - b > 0$. Кроме того, $b < -a$ влечёт $2b < -2a$, откуда $a + 2b < -a < 0$. Наконец, $b < 0$ и $a - b > 0$, поэтому $b(a - b) < 0$. Верны неравенства 2, 3, 4 и 6.

Вариант 3.2. На числовой оси отмечены точки, соответствующие числам b, $-a$ и a (см. рис.). Какие утверждения верны? Выберите все подходящие варианты:

1. $ab > 0$;
2. $a + b < 0$;
3. $\frac{a}{b} < 0$;
4. $a - b > 0$;
5. $2a + b > 0$;
6. $b(a - b) < 0$.

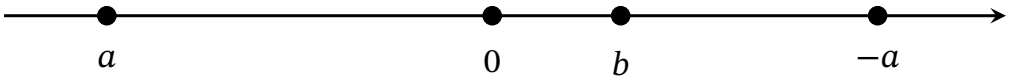


К задаче 3.2

Ответ: 3, 4, 5, 6.

Вариант 3.3. На числовой оси отмечены точки, соответствующие числам b, $-a$ и a (см. рис.). Какие утверждения верны? Выберите все подходящие варианты:

1. $ab > 0$;
2. $a + b < 0$;
3. $\frac{a}{b} < 0$;
4. $a - b > 0$;
5. $2a + b > 0$;
6. $b(a - b) < 0$.

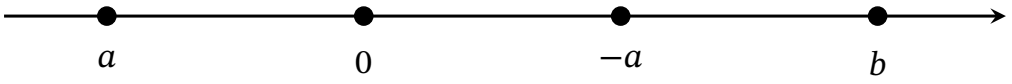


К задаче 3.3

Ответ: 2, 3, 6.

Вариант 3.4. На числовой оси отмечены точки, соответствующие числам b, $-a$ и a (см. рис.). Какие утверждения верны? Выберите все подходящие варианты:

1. $ab > 0$;
2. $a + b < 0$;
3. $\frac{a}{b} < 0$;
4. $a - b > 0$;
5. $a + 2b > 0$;
6. $b(a - b) < 0$.



К задаче 3.4

Ответ: 3, 5, 6.

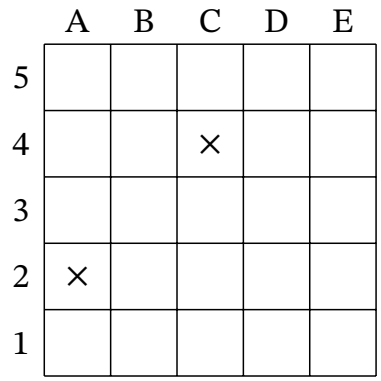
Задача 4.
Всего 7 баллов. Если не указан один из ответов, то 5 баллов.

Задача 4.1. Каждая клетка квадрата обозначена буквой столбца и номером строки. За один шаг можно перейти из клетки в соседнюю клетку, имеющую с ней общую сторону. Расстоянием между двумя клетками называется наименьшее число шагов, необходимое для перехода из одной клетки в другую.

На рисунке крестиками отмечены клетки $A2$ и $C4$.

Какие клетки находятся на расстоянии 3 как от клетки $A2$, так и от клетки $C4$? Выберите все подходящие варианты:

Ответ: $A5$, $C1$ и $D2$.



К задаче 4.1

Решение. Клетки на расстоянии 3 от $A2$, не выходящие за пределы квадрата, — это

$$A5, \quad B4, \quad C3, \quad D2, \quad C1.$$

Проверим их расстояния до $C4$. Для клеток $A5$, $D2$ и $C1$ они равны соответственно

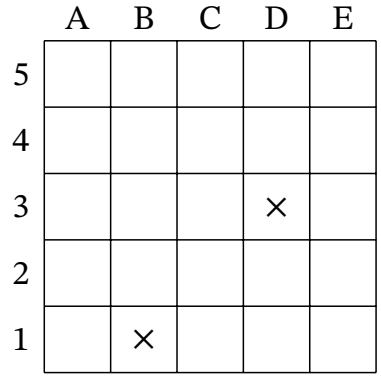
$$2 + 1 = 3, \qquad 1 + 2 = 3, \qquad 0 + 3 = 3.$$

Клетки $B4$ и $C3$ находятся от $C4$ на расстоянии 1. Поэтому подходят только клетки $A5$, $C1$ и $D2$.

Вариант 4.2. Каждая клетка квадрата обозначена буквой столбца и номером строки. За один шаг можно перейти из клетки в соседнюю клетку, имеющую с ней общую сторону. Расстоянием между двумя клетками называется наименьшее число шагов, необходимое для перехода из одной клетки в другую.

На рисунке крестиками отмечены клетки $B1$ и $D3$.

Какие клетки находятся на расстоянии 3 как от клетки $B1$, так и от клетки $D3$? Выберите все подходящие варианты:



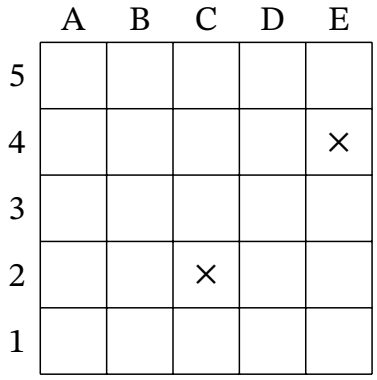
К задаче 4.2

Ответ: $A3$, $B4$ и $E1$.

Вариант 4.3. Каждая клетка квадрата обозначена буквой столбца и номером строки. За один шаг можно перейти из клетки в соседнюю клетку, имеющую с ней общую сторону. Расстоянием между двумя клетками называется наименьшее число шагов, необходимое для перехода из одной клетки в другую.

На рисунке крестиками отмечены клетки $C2$ и $E4$.

Какие клетки находятся на расстоянии 3 как от клетки $C2$, так и от клетки $E4$? Выберите все подходящие варианты:



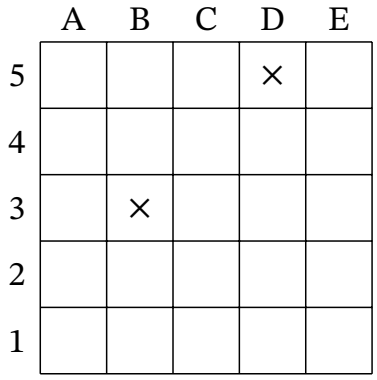
К задаче 4.3

Ответ: $E1$, $C5$ и $B4$.

Вариант 4.4. Каждая клетка квадрата обозначена буквой столбца и номером строки. За один шаг можно перейти из клетки в соседнюю клетку, имеющую с ней общую сторону. Расстоянием между двумя клетками называется наименьшее число шагов, необходимое для перехода из одной клетки в другую.

На рисунке крестиками отмечены клетки $B3$ и $D5$.

Какие клетки находятся на расстоянии 3 как от клетки $B3$, так и от клетки $D5$? Выберите все подходящие варианты:



К задаче 4.4

Ответ: $A5$, $D2$ и $E3$.

Задача 5.1. Код камеры хранения состоит из пяти различных цифр и имеет вид $\overline{abcde}$, причём первая цифра не равна нулю. Известно, что

$$a + b = 12, \qquad b - c = 5, \qquad d = 2c, \qquad e = a + d,$$

а сам код делится на 9. Восстановите код.

Ответ: 57249.

Решение. Положим $c = x$. Тогда из данных равенств последовательно получаем

$$b = x + 5, \qquad a = 12 - b = 7 - x, \qquad d = 2x, \qquad e = a + d = 7 + x.$$

Так как все эти числа являются цифрами, из $e = 7 + x \leqslant 9$ следует $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Сумма цифр кода равна

$$(7 - x) + (x + 5) + x + 2x + (7 + x) = 19 + 4x.$$

Для делимости кода на 9 эта сумма должна делиться на 9. При $x = 0, 1, 2$ это возможно только для $x = 2$, когда сумма равна 27. Тогда

$$(a, b, c, d, e) = (5, 7, 2, 4, 9),$$

то есть код равен 57249.

Вариант 5.2. Код камеры хранения состоит из пяти различных цифр и имеет вид $\overline{abcde}$, причём первая цифра не равна нулю. Известно, что

$$a + b = 8, \qquad b - c = 2, \qquad d = 2c, \qquad e = a + d,$$

а сам код делится на 9. Восстановите код.

Ответ: 53127.

Вариант 5.3. Код камеры хранения состоит из пяти различных цифр и имеет вид $\overline{abcde}$, причём первая цифра не равна нулю. Известно, что

$$a + b = 10, \qquad b - c = 5, \qquad d = 3c, \qquad e = a + d,$$

а сам код делится на 9. Восстановите код.

Ответ: 37269.

Вариант 5.4. Код камеры хранения состоит из пяти различных цифр и имеет вид $\overline{abcde}$, причём первая цифра не равна нулю. Известно, что

$$a + b = 7, \qquad b - c = 4, \qquad d = 4c, \qquad e = a + d,$$

а сам код делится на 9. Восстановите код.

Ответ: 25146.

Задача 6.1. На доске нарисован прямоугольник площади 130. Оказалось, что если длинную сторону уменьшить на 2, а короткую увеличить на 2, то прямоугольник станет квадратом. Найдите площадь получившегося квадрата.

Ответ: 134.

Решение. Пусть сторона получившегося квадрата равна x. Тогда стороны исходного прямоугольника равны $x+2$ и $x-2$. По условию

$$(x+2)(x-2)=130.$$

Следовательно,

$$x^2-4=130, \qquad x^2=134.$$

Но x^2 и есть площадь получившегося квадрата, поэтому ответ равен 134.

Вариант 6.2. На доске нарисован прямоугольник площади 96. Оказалось, что если длинную сторону уменьшить на 1, а короткую увеличить на 1, то прямоугольник станет квадратом. Найдите площадь получившегося квадрата.

Ответ: 97.

Вариант 6.3. На доске нарисован прямоугольник площади 230. Оказалось, что если длинную сторону уменьшить на 2, а короткую увеличить на 2, то прямоугольник станет квадратом. Найдите площадь получившегося квадрата.

Ответ: 234.

Вариант 7.6.4. На доске нарисован прямоугольник площади 300. Оказалось, что если длинную сторону уменьшить на 3, а короткую увеличить на 3, то прямоугольник станет квадратом. Найдите площадь получившегося квадрата.

Ответ: 309.

Задача 7.1. Наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен одному из этих чисел, а их произведение равно 7776. Какое наибольшее значение может принимать наименьшее из этих чисел?

Ответ: 36.

Решение. Пусть меньшее из чисел равно m. Если наибольший общий делитель двух чисел равен одному из них, то меньшее число делит большее. Значит, большее число имеет вид mk, и

$$m^2k=7776.$$

Разложим произведение на простые множители:

$$7776=2^5\cdot 3^5.$$

Так как m^2 делит 7776, в разложение m могут входить не более чем 2^2 и 3^2. Поэтому $m\leqslant 2^2\cdot 3^2=36$.

Значение 36 достигается: второе число тогда равно $7776:36=216$, причём 36 делит 216. Следовательно, наибольшее возможное значение меньшего числа равно 36.

Вариант 7.2. Наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен одному из этих чисел, а их произведение равно 3456. Какое наибольшее значение может принимать наименьшее из этих чисел?

Ответ: 24.

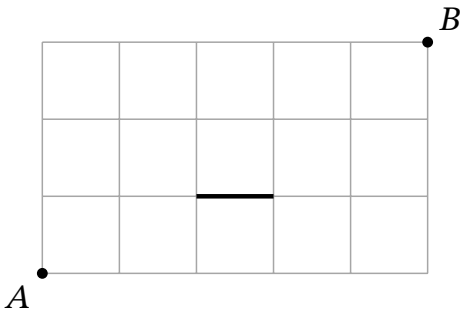
Вариант 7.3. Наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен одному из этих чисел, а их произведение равно 3375. Какое наибольшее значение может принимать наименьшее из этих чисел?

Ответ: 15.

Вариант 7.7.4. Наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен одному из этих чисел, а их произведение равно 1215. Какое наибольшее значение может принимать наименьшее из этих чисел?

Ответ: 9.

Задача 8.1. Робот может передвигаться по линиям сетки только вправо или вверх. Сколькими способами он может пройти из точки A в точку B, не проходя по участку, отмеченному на рисунке жирной линией?



К задаче 8.1

Ответ: 38.

Решение. Зададим координаты узлам сетки: точка (x, y) находится на x шагов вправо и y шагов вверх от точки A. Тогда $A = (0, 0)$, $B = (5, 3)$. Обозначим концы запрещённого отрезка через $C = (2, 1)$ и $D = (3, 1)$.

Сначала посчитаем все пути из A в B, не учитывая запрещённый отрезок. Каждый такой путь состоит из восьми шагов: пяти вправо и трёх вверх. Чтобы задать путь, достаточно указать, на каких трёх из восьми мест стоят шаги вверх. Число способов выбрать эти места равно

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56.$$

Делим на $3 \cdot 2 \cdot 1$, потому что порядок выбора трёх мест не важен.

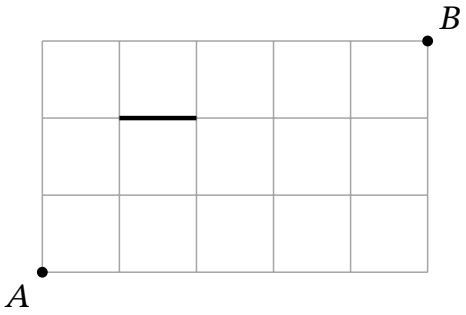
Теперь посчитаем пути, проходящие по запрещённому отрезку CD. Каждый из них состоит из пути из A в C, затем шага CD, а затем пути из D в B. До точки C нужно сделать два шага вправо и один вверх: шаг вверх можно поставить на любое из трёх мест, значит, есть 3 пути. От D до B нужны два шага вправо и два вверх. Выбрать места для двух шагов вверх среди четырёх можно шестью способами.

Выбор пути из A в C не зависит от выбора пути из D в B: каждая такая пара путей задаёт ровно один путь через CD. Поэтому запрещённый отрезок используют $3 \cdot 6 = 18$ путей.

Итак, от 56 путей вычитаем 18 путей, проходящих по запрещённому отрезку:

$$56 - 18 = 38.$$

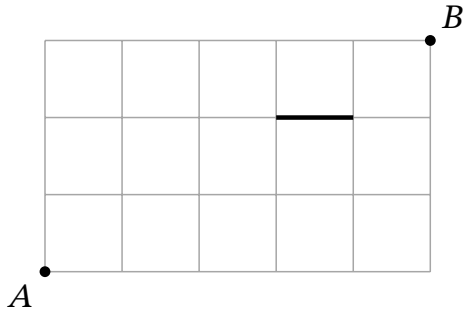
Вариант 8.2. Робот может передвигаться по линиям сетки только вправо или вверх. Сколькими способами он может пройти из точки A в точку B, не проходя по участку, отмеченному на рисунке жирной линией?



К задаче 8.2

Ответ: 44.

Вариант 8.3. Робот может передвигаться по линиям сетки только вправо или вверх. Сколькими способами он может пройти из точки A в точку B, не проходя по участку, отмеченному на рисунке жирной линией?

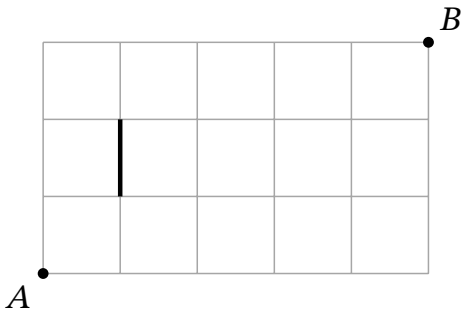


К задаче 8.3

Ответ: 36.

Вариант 8.4. Робот может передвигаться по линиям сетки только вправо или вверх. Сколькими способами он может пройти из точки A в точку B, не проходя по участку, отмеченному на рисунке жирной линией?

Ответ: 46.



К задаче 8.4