ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2026–2027 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 8 КЛАСС
ОТВЕТЫ

Максимальный балл за задание — 7. Максимальный балл за олимпиаду — 56

Задача 1.1. Куб $11 \times 11 \times 11$ составлен из единичных кубиков. Через его центр проложили три прямых тоннеля сечением 1×1: каждый тоннель соединяет центры двух противоположных граней, а направления тоннелей попарно перпендикулярны. Для этого все единичные кубики, через которые проходят тоннели, вынули.

Сколько кубиков вынули?
Ответ: 31

Решение. В каждом тоннеле находится 11 кубиков, поэтому сначала получаем $3 \cdot 11 = 33$. Однако центральный кубик вошёл в этот подсчёт трижды, а вынули его только один раз. Других общих кубиков у тоннелей нет. Значит, вынули $33 - 2 = 31$ кубик.

Вариант 1.2. Куб $9 \times 9 \times 9$ составлен из единичных кубиков. Через его центр проложили три прямых тоннеля сечением 1×1: каждый тоннель соединяет центры двух противоположных граней, а направления тоннелей попарно перпендикулярны. Для этого все единичные кубики, через которые проходят тоннели, вынули. Сколько кубиков вынули?

Ответ: 25.

Вариант 1.3. Куб $13 \times 13 \times 13$ составлен из единичных кубиков. Через его центр проложили три прямых тоннеля сечением 1×1: каждый тоннель соединяет центры двух противоположных граней, а направления тоннелей попарно перпендикулярны. Для этого все единичные кубики, через которые проходят тоннели, вынули. Сколько кубиков вынули?

Ответ: 37.

Вариант 1.4. Куб $15 \times 15 \times 15$ составлен из единичных кубиков. Через его центр проложили три прямых тоннеля сечением 1×1: каждый тоннель соединяет центры двух противоположных граней, а направления тоннелей попарно перпендикулярны. Для этого все единичные кубики, через которые проходят тоннели, вынули. Сколько кубиков вынули?

Ответ: 43.

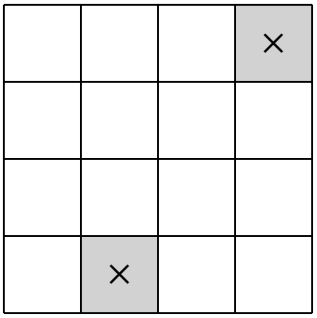
Задача 2.1. Пол зала разбит на 4×4 квадратные клетки. В двух клетках, отмеченных на рисунке, стоят колонны. Остальную часть пола покрывают плитками 1×2 клетки без наложений и зазоров. Плитки можно поворачивать.

Сколькими способами можно уложить плитки?

Ответ: 6 способов.

Решение. Обозначим клетки столбцами A, B, C, D слева направо и строками $1, 2, 3, 4$ снизу вверх. Колонны стоят в клетках $B1$ и $D4$.

Клетку $A1$ можно покрыть только плиткой $A1A2$: клетка $B1$ занята колонной. После этого клетку $C1$ можно покрыть двумя способами: плиткой $C1D1$ или плиткой $C1C2$. Разберём оба случая.



К задаче 2.1

1. Плитка $C1C2$**.** Тогда клетку $D1$ можно покрыть только вместе с $D2$. После этого клетка $D3$ должна покрываться вместе с $C3$, поскольку $D4$ занята колонной. Теперь клетка $C4$ может покрываться только вместе с $B4$. Оставшиеся клетки $B2$ и $B3$, а также $A3$ и $A4$ образуют две обязательные плитки: $B2B3$ и $A3A4$. Получилась ровно одна укладка.

2. Плитка $C1D1$**.** Рассмотрим клетку $A3$. Её можно покрыть либо плиткой $A3B3$, либо плиткой $A3A4$.

Если выбрана плитка $A3B3$, то для $A4$ остаётся только клетка $B4$, поэтому обязательна плитка $A4B4$. Затем плитка $B2C2$ также обязательна: остальные соседние с $B2$ клетки уже заняты или недоступны. Оставшиеся клетки покрываются плитками $C3C4$ и $D2D3$. В этой ветви получается одна укладка.

Если выбрана плитка $A3A4$, рассмотрим клетку $B2$. Её можно покрыть плиткой $B2B3$ или плиткой $B2C2$.

- При выборе $B2B3$ клетка $B4$ должна покрываться вместе с $C4$. Остаются клетки $C2$, $C3$, $D2$, $D3$. Их можно покрыть двумя способами: плитками $C2C3$ и $D2D3$ либо плитками $C2D2$ и $C3D3$.
- При выборе $B2C2$ остаётся покрыть клетку $B3$. Её можно объединить с $B4$ или с $C3$. Если выбрана плитка $B3B4$, оставшиеся клетки покрываются плитками $C3C4$ и $D2D3$. Если выбрана плитка $B3C3$, оставшиеся клетки покрываются плитками $B4C4$ и $D2D3$.

Таким образом, при выборе $C1D1$ получаются пять укладок: одна в случае $A3B3$ и ещё четыре в случае $A3A4$.

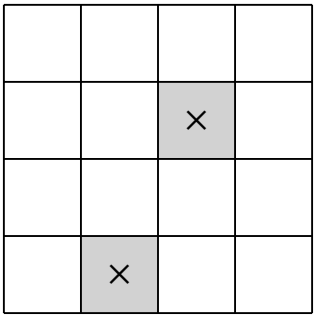
Всего укладок $1 + 5 = 6$.

Вариант 2.2. Пол зала разбит на 4×4 квадратные клетки. В двух клетках, отмеченных на рисунке, стоят колонны. Остальную часть пола покрывают плитками 1×2 клетки без наложений и зазоров. Плитки можно поворачивать. Сколькими способами можно уложить плитки?

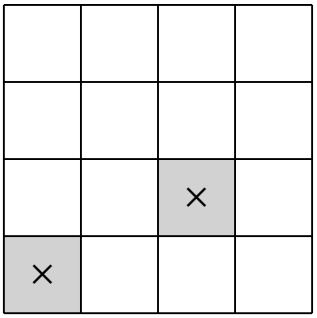
Ответ: 4 способа.

Вариант 2.3. Пол зала разбит на 4×4 квадратные клетки. В двух клетках, отмеченных на рисунке, стоят колонны. Остальную часть пола покрывают плитками 1×2 клетки без наложений и зазоров. Плитки можно поворачивать. Сколькими способами можно уложить плитки?

Ответ: 8 способов.

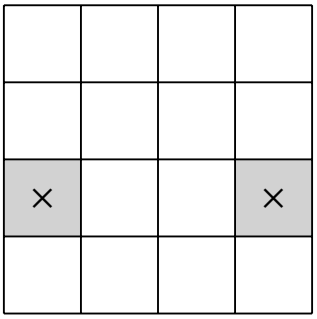


К задаче 2.2



К задаче 2.3

Вариант 2.4. Пол зала разбит на 4×4 квадратные клетки. В двух клетках, отмеченных на рисунке, стоят колонны. Остальную часть пола покрывают плитками 1×2 клетки без наложений и зазоров. Плитки можно поворачивать. Сколькими способами можно уложить плитки?



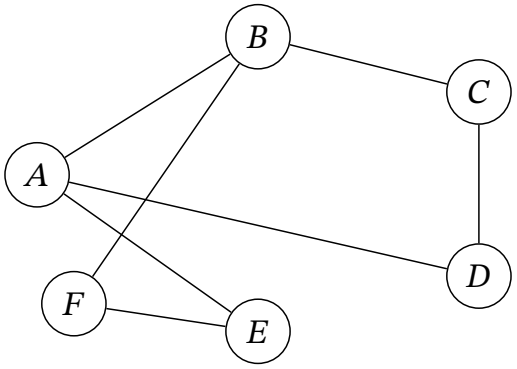
К задаче 2.4

Ответ: 6 способов.

Задача 3.1. На схеме показаны уже проложенные каналы связи между пунктами A,B,C,D,E,F. Требуется проложить ровно два новых канала так, чтобы к этим пунктам подходило 4,3,3,3,3,2 канала соответственно (к пункту A – 4 канала, пункту B – 3 канала, и т.д.). Проведите недостающие каналы.

Ответ: AC и DE.

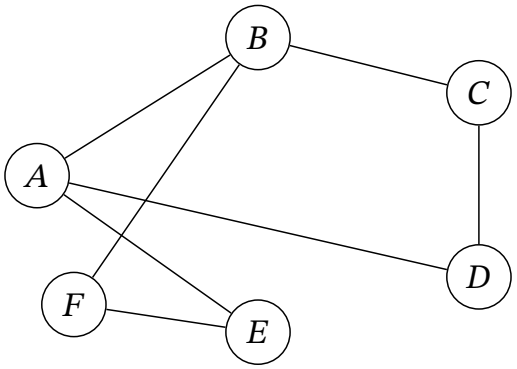
Решение. Сейчас к вершинам A, B,C,D, E, F подходит соответственно 3,3,2,2,2,2 канала. Значит, по одному новому каналу должно добавиться к вершинам A, C, D, E, а количество каналов в пунктах B и F меняться не должны.



К задаче 3.1

Эти четыре вершины нужно разбить на две пары. Пары AD, AE и CD уже соединены, поэтому единственное допустимое разбиение — AC и DE. Эти два канала и следует провести.

Вариант 3.2. На схеме показаны уже проложенные каналы связи между пунктами A, B, C, D, E, F. Требуется проложить ровно два новых канала так, чтобы к этим пунктам подходило 4, 4, 3, 3, 2, 2 канала соответственно (к пункту A – 4 канала, пункту 4 – 3 канала, и т.д.). Проведите недостающие каналы.



К задаче 3.2

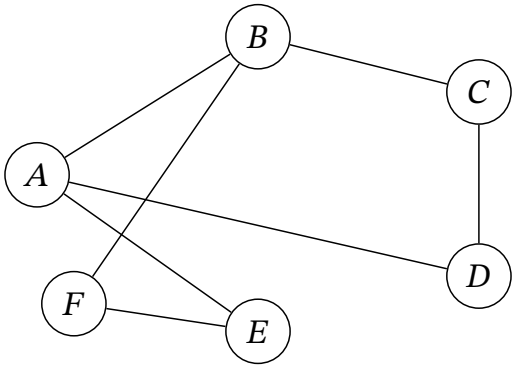
Ответ: AC и BD.

Вариант 3.3. На схеме показаны уже проложенные каналы связи между пунктами A, B, C, D, E, F. Требуется проложить ровно два новых канала так, чтобы к этим пунктам подходило 4, 3, 3, 2, 3, 3 канала соответственно (к пункту A – 4 канала, пункту B – 3 канала, и т.д.). Проведите недостающие каналы.

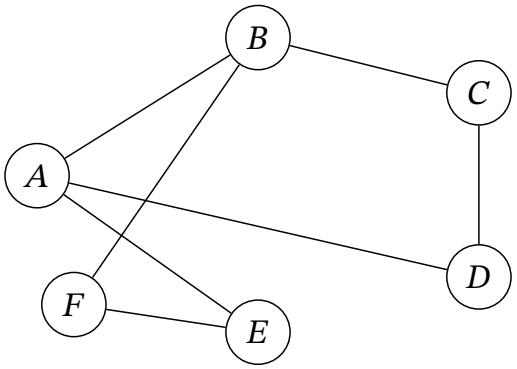
Ответ: AF и CE.

Задача 3.4. На схеме показаны уже проложенные каналы связи между пунктами A, B, C, D, E, F. Требуется проложить ровно два новых канала так, чтобы к этим пунктам подходило 3, 4, 3, 3, 3, 2 канала соответственно (к пункту A – 3 канала, пункту B – 4 канала, и т.д.). Проведите недостающие каналы.

Ответ: BD и CE.



К задаче 3.3



К задаче 3.4

Задача 4.1. Три автоматических датчика записывают показания в журнал:

датчик	первое время записи	период
A	2 мин	6 мин
B	6 мин	8 мин
C	5 мин	9 мин

Время отсчитывается от запуска системы. Найдите первые два момента, в которые все три датчика сделают запись одновременно. Ответ выразите в минутах.

Ответ: 14 мин и 86 мин.

Решение. Выпишем моменты записи каждого датчика до 14-й минуты включительно:

$$A:\ 2,\ 8,\ 14; \qquad B:\ 6,\ 14; \qquad C:\ 5,\ 14.$$

Следовательно, первый раз все три датчика сделают запись одновременно на 14-й минуте.

До следующей общей записи должно пройти время, которое делится на каждый из периодов: 6, 8 и 9 минут. Наименьшее такое время равно

$$\text{НОК}(6, 8, 9) = 72 \text{ мин}.$$

Поэтому второй общий момент наступит через 72 минуты после первого:

$$14 + 72 = 86 \text{ мин}.$$

Ответ: 14 мин и 86 мин.

Вариант 4.2. Три автоматических датчика записывают показания в журнал:

датчик	первое время записи	период
A	3 мин	4 мин
B	5 мин	6 мин
C	2 мин	9 мин

Время отсчитывается от запуска системы. Найдите первые два момента, в которые все три датчика сделают запись одновременно. Ответ выразите в минутах.

Ответ: 11 мин и 47 мин.

Вариант 4.3. Три автоматических датчика записывают показания в журнал:

датчик	первое время записи	период
A	2 мин	5 мин
B	1 мин	8 мин
C	7 мин	10 мин

Время отсчитывается от запуска системы. Найдите первые два момента, в которые все три датчика сделают запись одновременно. Ответ выразите в минутах.

Ответ: 17 мин и 57 мин.

Вариант 4.4. Три автоматических датчика записывают показания в журнал:

датчик	первое время записи	период
A	6 мин	7 мин
B	2 мин	9 мин
C	8 мин	12 мин

Время отсчитывается от запуска системы. Найдите первые два момента, в которые все три датчика сделают запись одновременно. Ответ выразите в минутах.

Ответ: 20 мин и 272 мин.

Задача 5.1. Трёхзначный код обладает следующими свойствами.

- Если первую цифру перенести в конец, число увеличится на 477.
- Если цифры записать в обратном порядке, число увеличится на 297.
- Исходный код делится на 11.

Найдите исходный код.

Ответ: 275.

Решение. Обозначим цифры кода через a, b, c. Из второго условия следует

$$(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 297,$$

то есть $99(c-a)=297$ и $c=a+3$.

Первое условие даёт

$$(100b+10c+a)-(100a+10b+c)=477.$$

Подставляя $c=a+3$, проиводя подобные и деля на 90, получаем $b=a+5$. По признаку делимости на 11 число $\overline{abc}$ делится на 11 тогда и только тогда, когда $a-b+c$ делится на 11. Здесь

$$a-b+c=a-(a+5)+(a+3)=a-2.$$

Так как a — цифра от 1 до 4, возможно только $a=2$. Тогда $b=7$, $c=5$, и искомый код равен 275.

Вариант 5.2. Трёхзначный код обладает следующими свойствами.

- Если первую цифру перенести в конец, число увеличится на 189.
- Если цифры записать в обратном порядке, число увеличится на 99.
- Исходный код делится на 11.

Найдите исходный код.

Ответ: 132.

Вариант 5.3. Трёхзначный код обладает следующими свойствами.

- Если первую цифру перенести в конец, число увеличится на 576.
- Если цифры записать в обратном порядке, число увеличится на 396.
- Исходный код делится на 11.

Найдите исходный код.

Ответ: 286.

Вариант 5.4. Трёхзначный код обладает следующими свойствами.

- Если первую цифру перенести в конец, число увеличится на 468.
- Если цифры записать в обратном порядке, число увеличится на 198.
- Исходный код делится на 11.

Найдите исходный код.

Ответ: 385.

Задача 6.1.
Сколько существует пар натуральных чисел $(a;b)$, для которых одновременно НОД$(a;b)=6$ и НОК$(a;b)=6300$?

Пары $(a;b)$ и $(b;a)$ при $a\neq b$ считаются различными.

Ответ: 16.

Решение. Так как НОД$(a;b) = 6$, имеем $a = 6a_1$, $b = 6b_1$, где a_1 и b_1 – взаимно простые натуральные числа. Тогда НОК$(a;b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a;b)} = 6a_1b_1 = 6300$, откуда $a_1b_1 = \frac{6300}{6} = 1050$. Осталось выяснить, сколькими способами можно разложить число 1050 на два взаимно простых множителя (с учётом порядка). Разложим на простые множители: $1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Чтобы множители a_1 и b_1 были взаимно простыми, необходимо распределить встречающиеся в этом разложении степени простых (2, 3, 5^2, 7) на две группы (соответствующие разложениям на простые множители чисел a_1 и b_1) так, чтобы каждая из степеней встретилась ровно в одной группе. Поскольку каждый из этих четырёх элементов независимо от остальных может оказаться в любой из двух групп, общее количество способов равно $2^4 = 16$, что и является ответом на вопрос задачи.

Вариант 6.2.

Сколько существует пар натуральных чисел $(a;b)$, для которых одновременно НОД$(a;b) = 8$ и НОК$(a;b) = 7560$?

Пары $(a;b)$ и $(b;a)$ при $a \neq b$ считаются различными.

Ответ: 8.

Вариант 6.3.

Сколько существует пар натуральных чисел $(a;b)$, для которых одновременно НОД$(a;b) = 12$ и НОК$(a;b) = 27720$?

Пары $(a;b)$ и $(b;a)$ при $a \neq b$ считаются различными.

Ответ: 32.

Вариант 6.4.

Сколько существует пар натуральных чисел $(a;b)$, для которых одновременно НОД$(a;b) = 15$ и НОК$(a;b) = 18900$?

Пары $(a;b)$ и $(b;a)$ при $a \neq b$ считаются различными.

Ответ: 16.

Задача 7.1. В треугольнике ABC $\angle BAC = 41°$. На стороне AC выбрана точка D, отличная от C, так, что $BD = BC$. На стороне AB выбрана точка E, отличная от B, так, что $CE = CB$. Отрезки BD и CE пересекаются в точке P. Найдите угол $\angle BPC$. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 98

Решение. Обозначим $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$. Так как $BD = BC$, треугольник BDC равнобедренный, поэтому

$$\angle BDC = \angle BCD = \gamma.$$

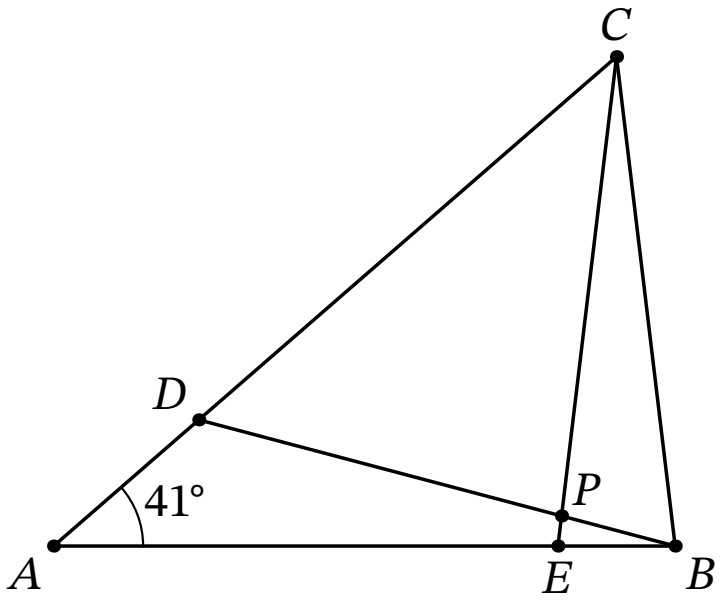
Следовательно, $\angle ADB = 180° - \gamma$. Аналогично из $CE = CB$ получаем $\angle BEC = \beta$, а значит, $\angle AEC = 180° - \beta$.

Рассмотрим четырёхугольник $AEPD$. Его угол при P вертикален углу BPC, поэтому равен ему. Из суммы углов четырёхугольника следует

$$\angle BPC = 360° - 41° - (180° - \beta) - (180° - \gamma) = \beta + \gamma - 41°.$$

По сумме углов треугольника ABC получаем $\beta + \gamma = 180° - \angle A = 180° - 41° = 139°$. Поэтому

$$\angle BPC = 139° - 41° = 98°.$$



К задаче 7.1

Вариант 7.2. В треугольнике ABC $\angle BAC = 37°$. На стороне AC выбрана точка D, отличная от C, так, что $BD = BC$. На стороне AB выбрана точка E, отличная от B, так, что $CE = CB$. Отрезки BD и CE пересекаются в точке P. Найдите угол $\angle BPC$.

Ответ: 106°.

Вариант 7.3. В треугольнике ABC $\angle BAC = 48°$. На стороне AC выбрана точка D, отличная от C, так, что $BD = BC$. На стороне AB выбрана точка E, отличная от B, так, что $CE = CB$. Отрезки BD и CE пересекаются в точке P. Найдите угол $\angle BPC$.

Ответ: 84°.

Вариант 7.4. В треугольнике ABC $\angle BAC = 53°$. На стороне AC выбрана точка D, отличная от C, так, что $BD = BC$. На стороне AB выбрана точка E, отличная от B, так, что $CE = CB$. Отрезки BD и CE пересекаются в точке P. Найдите угол $\angle BPC$.

Ответ: 74°.

Задача 8.1. Число x таково, что $x^3 + 4x = 8$. Найдите $x^7 + 64x^2 + 5$.

Ответ: 133

Решение. Из условия $x^3 = 8 - 4x$. Последовательно получаем

$$x^4 = 8x - 4x^2, \qquad x^5 = 8x^2 - 4x^3 = 8x^2 + 16x - 32.$$

Теперь

$$\begin{aligned} x^7 = x^3x^4 &= (8 - 4x)(8x - 4x^2) \\ &= 64x - 64x^2 + 16x^3 \\ &= 64x - 64x^2 + 16(8 - 4x) = 128 - 64x^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x^7 + 64x^2 + 5 = 128 + 5 = 133.$$

Вариант 8.2. Число x таково, что $x^3 + 4x = 8$. Найдите $x^7 + 64x^2 + 6$

Ответ: 134.

Вариант 8.3. Число x таково, что $x^3 + 4x = 8$. Найдите $x^7 + 64x^2 + 7$.

Ответ: 135.

Вариант 8.4. Число x таково, что $x^3 + 4x = 8$. Найдите $x^7 + 64x^2 + 8$.

Ответ: 136.