ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2026–2027 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 9 КЛАСС
ОТВЕТЫ

Максимальный балл за задание — 7. Максимальный балл за олимпиаду — 56

Задача 1.1. Пять участников забега финишировали без ничьих. Известно, что

- Андрей не был ни первым, ни последним;
- Витя финишировал непосредственно перед Андреем;
- Боря занял место на две позиции ниже, чем Витя;
- Дима финишировал раньше Глеба;
- Глеб не был последним.

Расположите участников в том порядке, в котором они финишировали.

Ответ: Дима, Глеб, Витя, Андрей, Боря

Решение. Из второго и третьего условий места Вити, Андрея и Бори идут подряд именно в таком порядке. Возможны только три положения этого блока.

Если Витя первый, то Дима и Глеб занимают четвёртое и пятое места; условие «Дима раньше Глеба» делает Глеба последним, что запрещено. Если Витя второй, то свободны первое и пятое места, и те же два условия снова вынуждают Глеба быть последним. Значит, Витя третий, Андрей четвёртый, а Боря пятый. На двух оставшихся местах Дима должен стоять раньше Глеба. Искомый порядок:

Дима, Глеб, Витя, Андрей, Боря.

Вариант 1.2. Пять участников забега финишировали без ничьих. Известно, что

- Боря не был ни первым, ни последним;
- Дима финишировал непосредственно перед Борей;
- Глеб занял место на две позиции ниже, чем Дима;
- Андрей финишировал раньше Вити;
- Витя не был последним.

Расположите участников в том порядке, в котором они финишировали.

Ответ: Андрей, Витя, Дима, Боря, Глеб.

Вариант 1.3. Пять участников забега финишировали без ничьих. Известно, что

- Витя не был ни первым, ни последним;
- Глеб финишировал непосредственно перед Витей;
- Дима занял место на две позиции ниже, чем Глеб;
- Боря финишировал раньше Андрея;
- Андрей не был последним.

Расположите участников в том порядке, в котором они финишировали.

Ответ: Боря, Андрей, Глеб, Витя, Дима.

Вариант 1.4. Пять участников забега финишировали без ничьих. Известно, что

- Дима не был ни первым, ни последним;
- Андрей финишировал непосредственно перед Димой;
- Витя занял место на две позиции ниже, чем Андрей;
- Глеб финишировал раньше Бори;
- Боря не был последним.

Расположите участников в том порядке, в котором они финишировали.

Ответ: Глеб, Боря, Андрей, Дима, Витя.

Задача 2

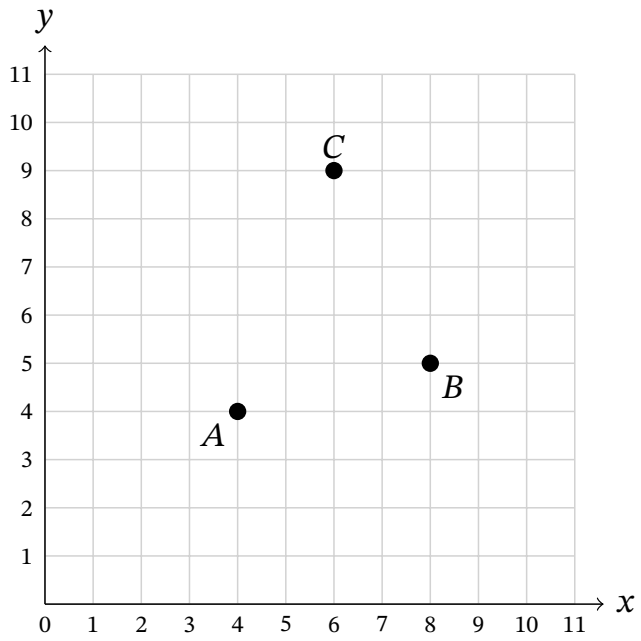
Всего 7 баллов. а) по 1 баллу за каждый правильный ответ; б) 4 балла за верный ответ.

Задача 2.1.

Точки $A = (4, 4)$, $B = (8, 5)$ и $C = (6, 9)$ являются тремя вершинами параллелограмма, но неизвестно, какие из них соседние, а какие противоположные.

(а) Напишите все возможные положения четвёртой вершины D,

(б) Найдите сумму площадей получившихся параллелограммов.



К задаче 2.1

Ответ: а) $(10, 10)$, $(2, 8)$ или $(6, 0)$. б) 54.

Решение. В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит, середины двух диагоналей совпадают. Возможны три случая.

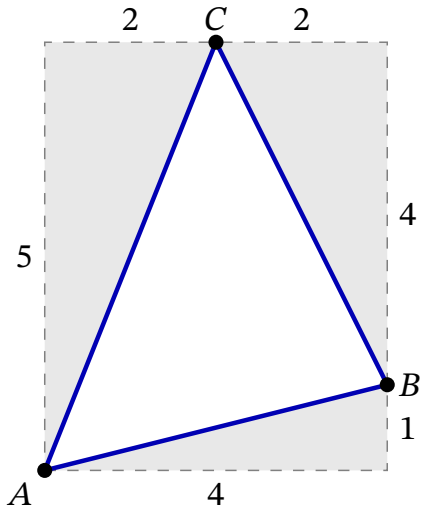
Если противоположные вершины — A и D, то середина AD совпадает с серединой BC. Середина BC имеет координаты $\left(\frac{8+6}{2}, \frac{5+9}{2}\right) = (7, 7)$. Поэтому середина AD тоже равна $(7, 7)$. Из $\left(\frac{4+x_D}{2}, \frac{4+y_D}{2}\right) = (7, 7)$ получаем $D = (10, 10)$.

Если противоположны B и D, то середина BD совпадает с серединой AC. Середина AC равна $\left(\frac{4+6}{2}, \frac{4+9}{2}\right) = \left(5, \frac{13}{2}\right)$. Следовательно, $\left(\frac{8+x_D}{2}, \frac{5+y_D}{2}\right) = \left(5, \frac{13}{2}\right)$, откуда $D = (2, 8)$.

Если противоположны C и D, то середина CD совпадает с серединой AB. Середина AB равна $\left(\frac{4+8}{2}, \frac{4+5}{2}\right) = \left(6, \frac{9}{2}\right)$. Поэтому $\left(\frac{6+x_D}{2}, \frac{9+y_D}{2}\right) = \left(6, \frac{9}{2}\right)$, откуда $D = (6, 0)$.

Это все возможные положения четвёртой вершины.

Найдём площадь треугольника ABC. Дополним его до прямоугольника 4×5. Вне треугольника останутся три прямоугольных треугольника с катетами 4 и 1, 4 и 2, 5 и 2.



Вычисление площади треугольника ABC

Поэтому

$$S_{ABC} = 4 \cdot 5 - \frac{4 \cdot 1}{2} - \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{5 \cdot 2}{2} = 9.$$

Каждый из трёх параллелограммов состоит из двух треугольников, равных по площади треугольнику ABC. Поэтому сумма площадей трёх параллелограммов равна

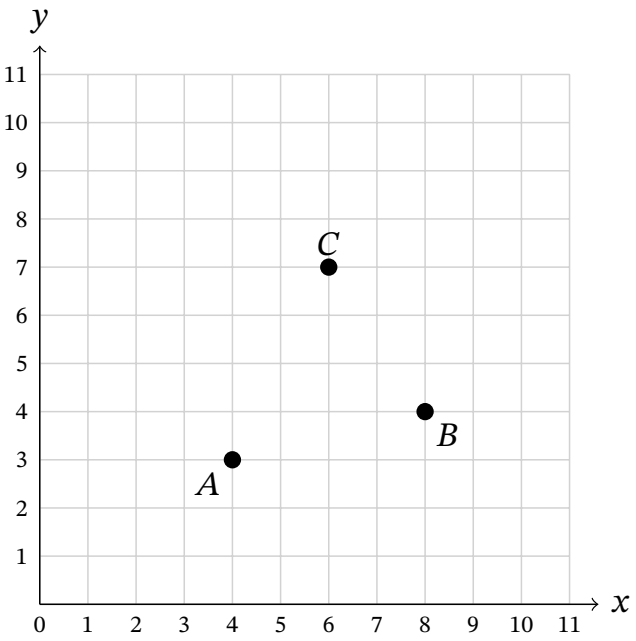
$$3 \cdot 2S_{ABC} = 6 \cdot 9 = 54.$$

Вариант 2.2. Точки $A = (4, 3)$, $B = (8, 4)$ и $C = (6, 7)$ являются тремя вершинами параллелограмма, но неизвестно, какие из них соседние, а какие противоположные. **(а)** Напишите все возможные положения четвёртой вершины D. **(б)** Найдите сумму площадей получившихся параллелограммов.

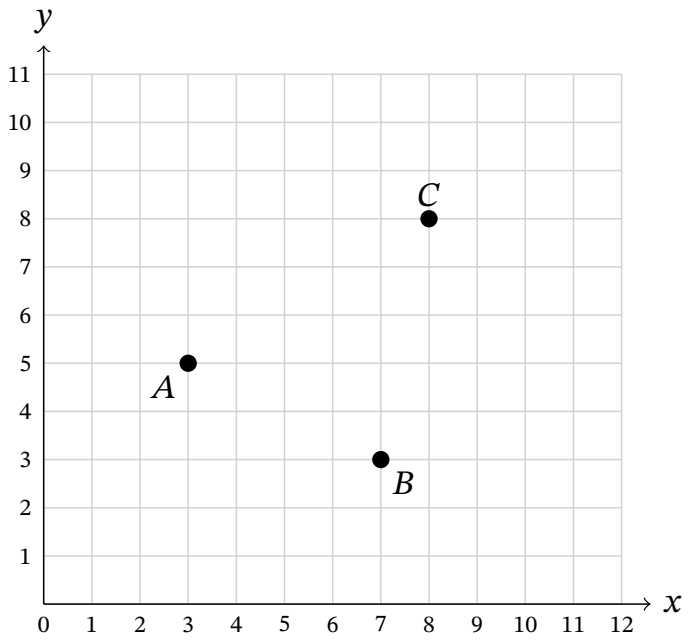
Ответ: а) $(10, 8)$, $(2, 6)$ или $(6, 0)$. б) 42.

Вариант 2.3. Точки $A = (3, 5)$, $B = (7, 3)$ и $C = (8, 8)$ являются тремя вершинами параллелограмма, но неизвестно, какие из них соседние, а какие противоположные. **(а)** Напишите все возможные положения четвёртой вершины D. **(б)** Найдите сумму площадей получившихся параллелограммов.

Ответ: а) $(12, 6)$, $(4, 10)$ или $(2, 0)$. б) 66.



К задаче 2.2



К задаче 2.3

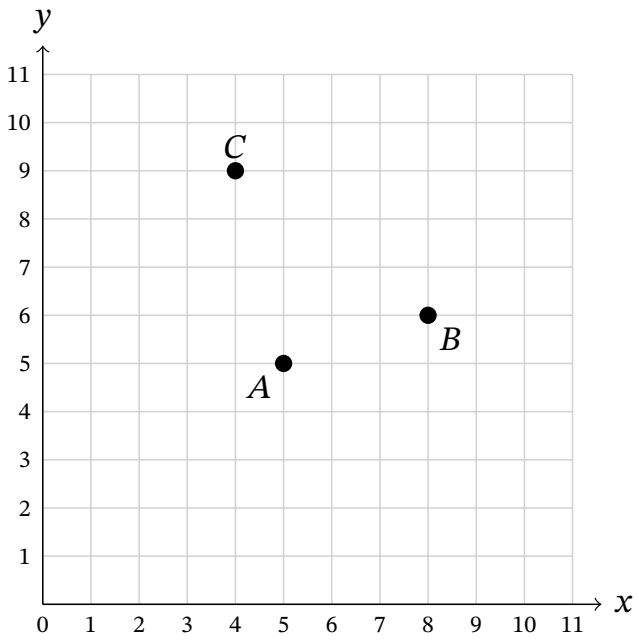
Вариант 2.4. Точки $A = (5, 5), B = (8, 6)$ и $C = (4, 9)$ являются тремя вершинами параллелограмма, но неизвестно, какие из них соседние, а какие противоположные. **(а)** Напишите все возможные положения четвёртой вершины D. **(б)** Найдите сумму площадей получившихся параллелограммов.

Ответ: а) $(7, 10)$, $(1, 8)$ или $(9, 2)$. б) 39.

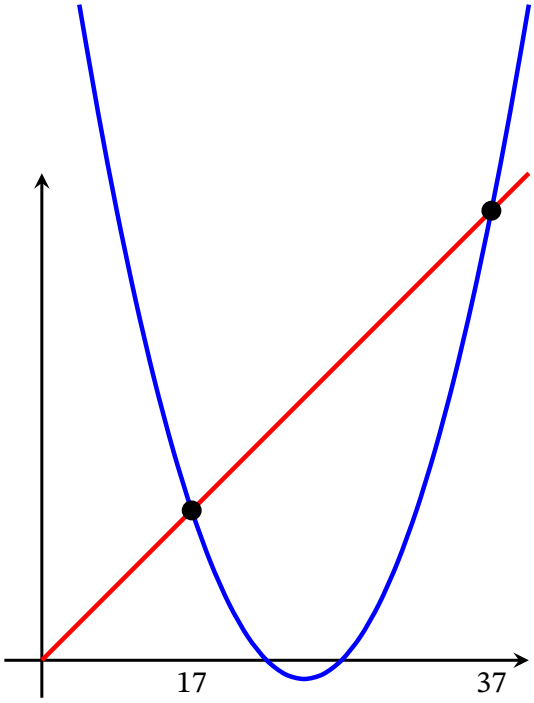
Задача 3.1. График приведённого квадратного трёхчлена пересекает биссектрису первой координатной четверти в точках с абсциссами 17 и 37. Найдите абсциссу вершины этого трёхчлена.

Ответ: $26,5$

Решение. Пусть приведённый квадратный трёхчлен равен $f(x) = x^2 + bx + c$. Точки пересечения



К задаче 2.4



К задаче 3.1

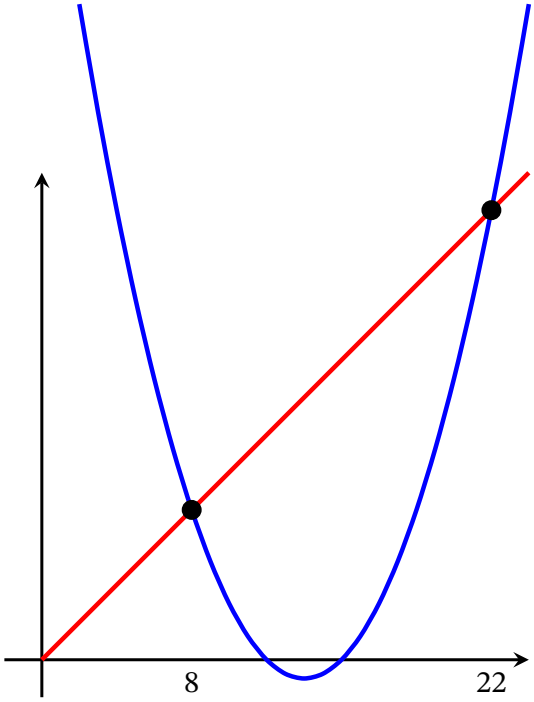
с биссектрисой $y = x$ задаются уравнением

$$x^2 + bx + c = x.$$

Его корни равны 17 и 37, поэтому по теореме Виета $17 + 37 = 1 - b$, откуда $b = -53$. Абсцисса вершины параболы равна

$$-\frac{b}{2} = \frac{53}{2} = 26{,}5.$$

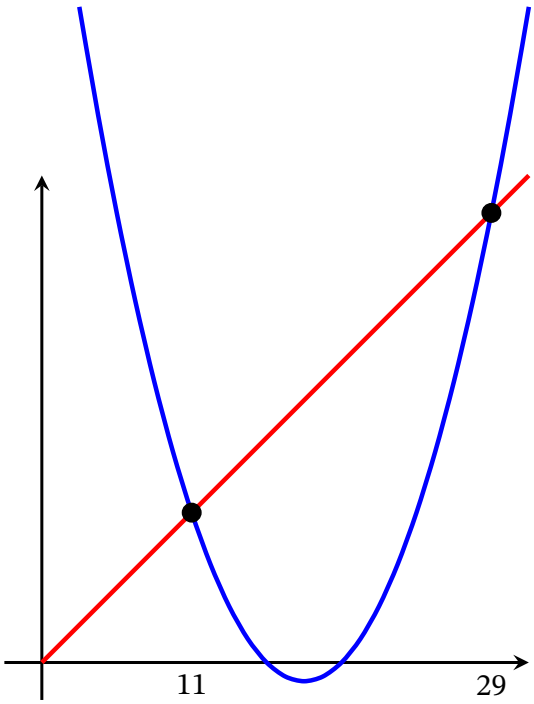
Вариант 3.2. График приведённого квадратного трёхчлена пересекает биссектрису первой координатной четверти в точках с абсциссами 8 и 22. Найдите абсциссу вершины этого трёхчлена.



К задаче 3.2

Ответ: 14, 5.

Вариант 3.3. График приведённого квадратного трёхчлена пересекает биссектрису первой координатной четверти в точках с абсциссами 11 и 28. Найдите абсциссу вершины этого трёхчлена.

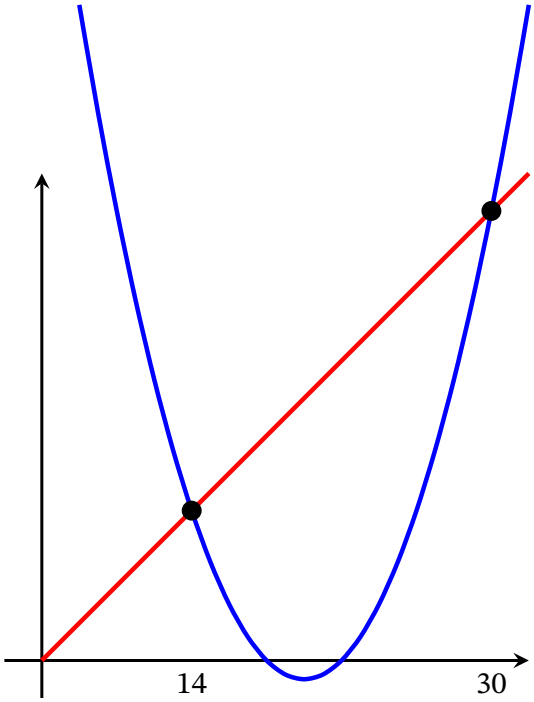


К задаче 3.3

Ответ: 19, 5.

Вариант 3.4. График приведённого квадратного трёхчлена пересекает биссектрису первой ко-

ординатной четверти в точках с абсциссами 14 и 30. Найдите абсциссу вершины этого трёхчлена.



К задаче 3.4

Ответ: 21, 5.

Задача 4.1. Отметьте несколько клеток в этом квадрате 4×4 так, чтобы никакие две отмеченные клетки не имели общей точки, а сумма чисел в отмеченных клетках была максимально возможной.

5	6	7	8
16	17	18	9
15	20	19	10
14	13	12	11

К задаче 4.1

Ответ: 16, 18, 14, 12

Решение. Обозначим столбцы буквами A, B, C, D слева направо, а строки — числами 1, 2, 3, 4 снизу вверх. Например, клетка $A1$ содержит число 14, а клетка $C3$ — число 18.

В центральном квадрате 2×2 нельзя отметить больше одной клетки: любые две его клетки имеют общую точку. Поэтому разберём пять случаев: не отмечена ни одна центральная клетка или отмечена ровно одна из четырёх клеток $B2, C2, B3, C3$.

Будем также использовать, что в каждом из четырёх квадратов 2×2, на которые делится доска, можно отметить не более одной клетки.

- **Ни одна центральная клетка не отмечена.** В нижнем левом квадрате можно выбрать клетку не больше чем с числом 15, в нижнем правом — 12, в верхнем левом — 16, в верхнем правом — 9. Если выбрана клетка $A2$ с числом 15, то клетка $A3$ с числом 16 уже недоступна, и в верхнем левом квадрате остаётся выбрать не больше 6. Тогда сумма не превосходит $15 + 12 + 6 + 9 = 42$. Если $A2$ не выбрана, сумма не превосходит $14 + 12 + 16 + 9 = 51$. Эта сумма достигается на клетках $A1, C1, A3, D3$.

- **Отмечена клетка $B2$ с числом 20.** В нижнем левом квадрате она исключает все остальные клетки. В трёх других квадратах наибольшие доступные числа — соответственно 11, 6 и 9. Поэтому сумма не превосходит $20 + 11 + 6 + 9 = 46$. Она достигается, например, на клетках $B2, D1, B4, D3$.

- **Отмечена клетка $C2$ с числом 19.** В нижнем правом квадрате больше нельзя отметить клеток. В нижнем левом, верхнем левом и верхнем правом квадратах наибольшие доступные числа — 15, 16 и 8. Если выбрать $A2$ с числом 15, то $A3$ уже выбрать нельзя, и в верхнем левом квадрате наибольшее доступное число будет 6. В этом случае сумма не превосходит $19 + 15 + 6 + 8 = 48$. Если $A2$ не выбрана, сумма не превосходит $19 + 14 + 16 + 8 = 57$. Она достигается на клетках $C2, A1, A3, D4$.

- **Отмечена клетка $B3$ с числом 17.** В верхнем левом квадрате больше нельзя отметить клеток. В нижнем левом, нижнем правом и верхнем правом квадратах наибольшие доступные числа — 14, 12 и 9. Значит, сумма не превосходит $17 + 14 + 12 + 9 = 52$. Она достигается на клетках $B3, A1, C1, D3$.

- **Отмечена клетка $C3$ с числом 18.** В верхнем правом квадрате больше нельзя отметить клеток. В остальных трёх квадратах наибольшие доступные числа — 16, 15 и 12. Если выбрана клетка $A2$ с числом 15, то $A3$ уже выбрать нельзя, и в верхнем левом квадрате наибольшее доступное число будет 5. Тогда сумма не превосходит $18 + 15 + 5 + 12 = 50$. Если $A2$ не выбрана, сумма не превосходит $18 + 14 + 16 + 12 = 60$. Она достигается на клетках $C3, A1, A3, C1$.

Сравнивая пять случаев, получаем наибольшую возможную сумму 60. Для её получения нужно отметить клетки с числами 14, 18, 16 и 12.

Вариант 4.2. Отметьте несколько клеток в этом квадрате 4×4 так, чтобы никакие две отмеченные клетки не имели общей точки, а сумма чисел в отмеченных клетках была максимально возможной.

Ответ: 36, 38, 34, 32.

Вариант 4.3. Отметьте несколько клеток в этом квадрате 4×4 так, чтобы никакие две отмеченные клетки не имели общей точки, а сумма чисел в отмеченных клетках была максимально возможной.

Ответ: 56, 58, 54, 52.

Вариант 4.4. Отметьте несколько клеток в этом квадрате 4×4 так, чтобы никакие две отмеченные клетки не имели общей точки, а сумма чисел в отмеченных клетках была максимально возможной.

34	35	36	25
33	40	37	26
32	39	38	27
31	30	29	28

К задаче 4.2

51	52	53	54
50	59	60	55
49	58	57	56
48	47	46	45

К задаче 4.3

68	69	70	71
67	78	79	72
66	77	80	73
65	76	75	74

К задаче 4.4

Ответ: 76, 78, 74, 72.

Задача 5.1. Сумма двух натуральных чисел равна 330, их наибольший общий делитель равен 30, а наименьшее общее кратное равно 900. Найдите эти числа.

Ответ: 150 и 180.

Решение. Пусть числа равны $30x$ и $30y$. Так как их НОД равен 30, числа x и y взаимно просты. Для взаимно простых x и y имеем

$$\text{НОК}(30x, 30y) = 30xy,$$

поэтому $xy = 900 : 30 = 30$. Кроме того, из условия о сумме получаем $x + y = 330 : 30 = 11$.

Взаимно простая пара множителей числа 30 с суммой 11 — это только 5 и 6. Следовательно, искомые числа равны $30 \cdot 5 = 150$ и $30 \cdot 6 = 180$.

Вариант 5.2. Сумма двух натуральных чисел равна 144, их наибольший общий делитель равен 12, а наименьшее общее кратное равно 420. Найдите эти числа.

Ответ: 60 и 84.

Вариант 5.3. Сумма двух натуральных чисел равна 162, их наибольший общий делитель равен 18, а наименьшее общее кратное равно 360. Найдите эти числа.

Ответ: 72 и 90.

Вариант 5.4. Сумма двух натуральных чисел равна 275, их наибольший общий делитель равен 25, а наименьшее общее кратное равно 600. Найдите эти числа.

Ответ: 75 и 200.

Задача 6.1. На доске записаны числа 1 и 1. За один ход разрешается прибавить одно из записанных чисел к другому, заменив второе число полученной суммой. За какое наименьшее число ходов можно получить на доске пару чисел 93 и 161?

Ответ: 11.

Решение. Будем идти в обратную сторону. Последний ход однозначно восстанавливается: из большего числа нужно вычесть меньшее. Поэтому любой путь к паре $(93, 161)$ при обратном ходе обязан пройти через цепочку

$$\begin{aligned}(93,161) &\to (93,68) \to (25,68) \to (25,43) \to (25,18)\\ &\to (7,18) \to (7,11) \to (7,4) \to (3,4)\\ &\to (3,1) \to (2,1) \to (1,1).\end{aligned}$$

В цепочке 11 переходов. Если прочитать её справа налево, каждый переход является разрешённым ходом, поэтому пара действительно получается за 11 ходов. Однозначность обратного перехода показывает, что быстрее это сделать нельзя.

Вариант 6.2. На доске записаны числа 1 и 1. За один ход разрешается прибавить одно из записанных чисел к другому, заменив второе число полученной суммой. За какое наименьшее число ходов можно получить пару чисел 93 и 25?

Ответ: 10.

Вариант 6.3. На доске записаны числа 1 и 1. За один ход разрешается прибавить одно из записанных чисел к другому, заменив второе число полученной суммой. За какое наименьшее число ходов можно получить пару чисел 43 и 68?

Ответ: 9.

Вариант 6.4. На доске записаны числа 1 и 1. За один ход разрешается прибавить одно из записанных чисел к другому, заменив второе число полученной суммой. За какое наименьшее число ходов можно получить пару чисел 143 и 25?
Ответ: 12.

Задача 7

Всего 7 баллов. Если не указан один из ответов, то 3 балла.

Задача 7.1.

Даны 100 карточек с числами $1, 2, \dots, 100$. Для каждой пары карточек Петя выписал на доску их сумму и разность. Так на доске оказались выписаны 9900 чисел. Какие числа выписаны на доске ровно 60 раз?

Ответ: 78, 79.

Решение. Рассмотрим число k на доске. Оно могло появиться как разность или как сумма чисел на двух различных карточках.

Сначала пусть $1 \leqslant k \leqslant 99$. Как разность k получается из пар карточек

$$(1, 1+k), (2, 2+k), \dots, (100-k, 100).$$

Таких пар $100 - k$.

Посчитаем, сколько раз k получается как сумма. Если $k = 2t$ — чётное, пары имеют вид

$$(1, 2t-1), (2, 2t-2), \dots, (t-1, t+1),$$

то есть таких пар $t - 1$. Если $k = 2t + 1$ — нечётное, пары имеют вид

$$(1, 2t), (2, 2t-1), \dots, (t, t+1),$$

то есть таких пар t.

Итак, при $k = 2t$ общее число появлений равно

$$(100 - 2t) + (t - 1) = 99 - t,$$

а при $k = 2t + 1$ оно равно

$$(99 - 2t) + t = 99 - t.$$

Чтобы число появилось ровно 60 раз, нужно $99 - t = 60$, откуда $t = 39$. Получаем $k = 78$ или $k = 79$.

Остаётся проверить числа $k \geqslant 100$. Они не могут быть разностями: разность двух чисел от 1 до 100 не превосходит 99. Если $k > 199$, оно не может быть и суммой, поскольку сумма двух различных карточек не превосходит $99 + 100 = 199$.

Пусть $100 \leqslant k \leqslant 199$. Обозначим меньшее число в паре через x. Тогда большее равно $k - x$ и не превосходит 100, поэтому $x \geqslant k - 100$. Кроме того, $x < k - x$, то есть $x < k/2$. Таким образом, у x не более 50 возможных целых значений, а значит, k получается как сумма не более 50 раз.

Следовательно, ровно 60 раз на доске выписаны числа 78 и 79.

Вариант 7.2. Даны 80 карточек с числами $1, 2, \dots, 80$. Для каждой пары карточек Петя выписал на доску их сумму и разность. Так на доске оказались выписаны 6320 чисел. Какие числа выписаны на доске ровно 48 раз?

Ответ: 62, 63.

Вариант 7.3. Даны 120 карточек с числами $1, 2, \ldots, 120$. Для каждой пары карточек Петя выписал на доску их сумму и разность. Так на доске оказались выписаны 14280 чисел. Какие числа выписаны на доске ровно 72 раза?

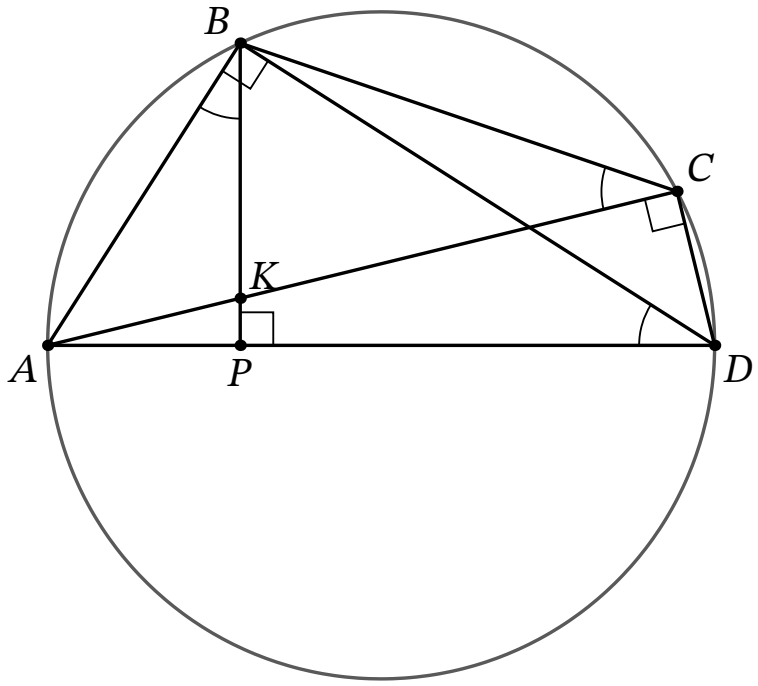
Ответ: 94, 95.

Вариант 7.4. Даны 90 карточек с числами $1, 2, \ldots, 90$. Для каждой пары карточек Петя выписал на доску их сумму и разность. Так на доске оказались выписаны 8010 чисел. Какие числа выписаны на доске ровно 54 раза?

Ответ: 70, 71.

Задача 8.1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle ACD = 90°$. Перпендикуляр к AD, проведённый из точки B, пересекает отрезок AC в точке K. Найдите длину отрезка KC, если $AB = 7$, $AK = 2$.

Ответ: 22,5.



К решению задачи 8.1

Решение. Обозначим через P основание перпендикуляра, опущенного из B на AD. Поскольку $\angle ABD = \angle ACD = 90°$, четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AD. Тогда $\angle ACB = \angle ADB$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Кроме того,

$$\angle PBD = 90° - \angle BDA, \qquad \angle ABK = 90° - \angle PBD = \angle BDA = \angle ACB.$$

Следовательно, треугольники ABK и ACB подобны по двум углам. Поэтому

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AB}{AC}, \qquad AC = \frac{AB^2}{AK} = \frac{7^2}{2} = 24{,}5.$$

Значит,

$$KC = AC - AK = 24{,}5 - 2 = 22{,}5.$$

Комментарий. Альтернативное решение можно получить из цепочки равенств $AB^2 = AP \cdot AD = AK \cdot AC$, где первое – свойство прямоугольного треугольника ABD, а второе – следствие теоремы о произведении отрезков секущих для окружности, описанной около четырёхугольника $PKCD$ (он вписан, так как сумма его противоположных углов равна 180°).

Вариант 8.2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle ACD = 90°$. Перпендикуляр к AD, проведённый из точки B, пересекает отрезок AC в точке K. Найдите длину отрезка KC, если $AB = 6$, $AK = 2$.

Ответ: 16.

Вариант 8.3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle ACD = 90°$. Перпендикуляр к AD, проведённый из точки B, пересекает отрезок AC в точке K. Найдите длину отрезка KC, если $AB = 8$, $AK = 4$.

Ответ: 12.

Вариант 8.4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle ACD = 90°$. Перпендикуляр к AD, проведённый из точки B, пересекает отрезок AC в точке K. Найдите длину отрезка KC, если $AB = 9$, $AK = 3$.

Ответ: 24.