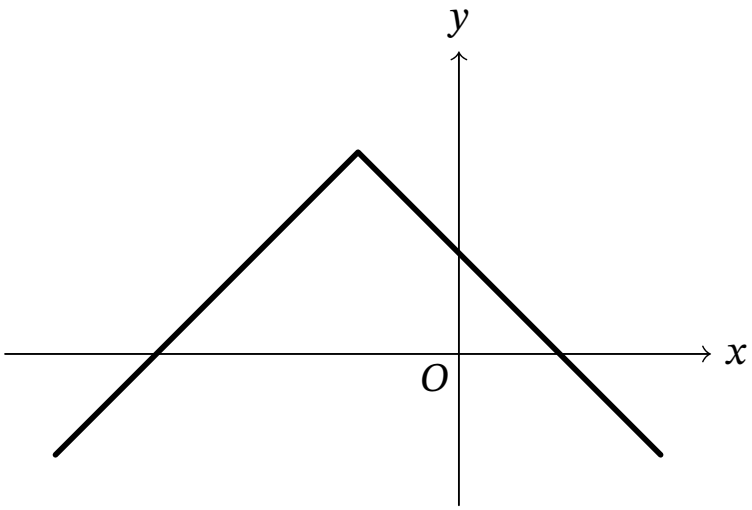
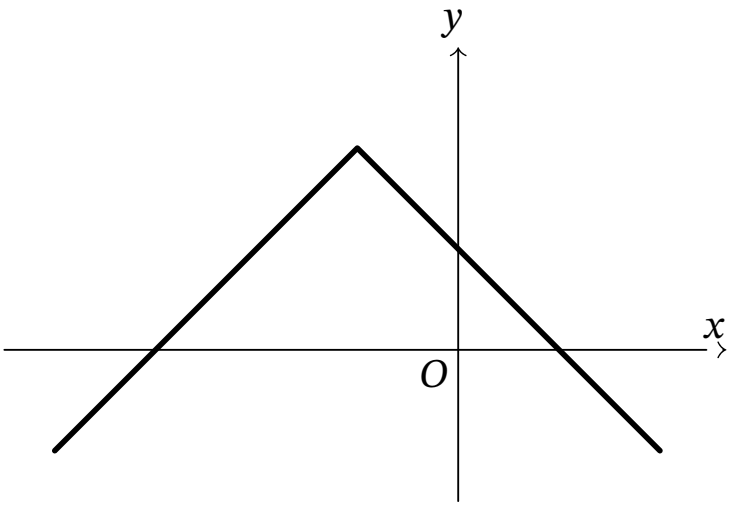
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2026–2027 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 10 КЛАСС

Задача 1.1. На рисунке изображён график функции $y = a - |kx + b|$.



К задаче 1



К задаче 1.2

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;
3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

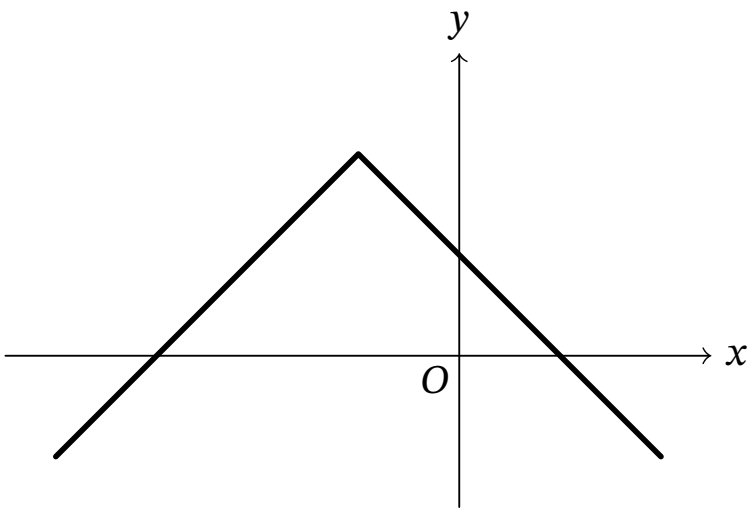
Вариант 1.2.

На рисунке изображён график функции $y = -a - |kx + b|$.
Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

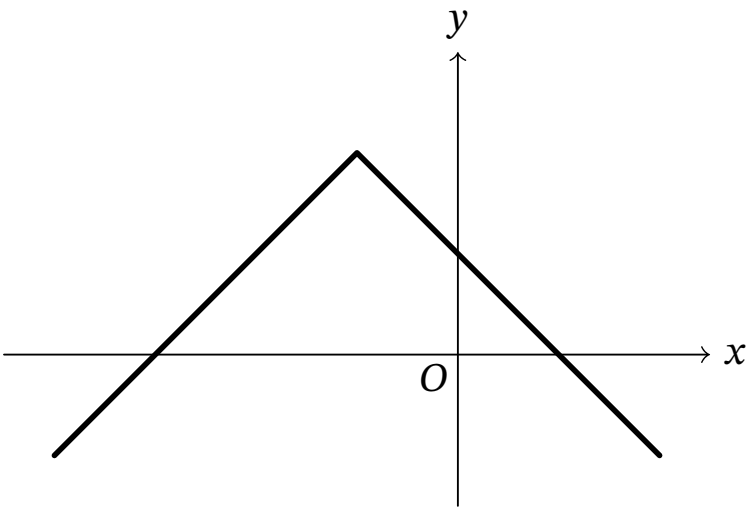
1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;
3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Вариант 1.3.

На рисунке изображён график функции $y = a - |kx - b|$.



К задаче 1.3



К задаче 1.4

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;
3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Вариант 1.4.

На рисунке изображён график функции $y = -a - |kx - b|$.

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;
3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Задача 2.1. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 18$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 24$.

(а) Какие значения может принимать b?

(б) Какие значения может принимать a?

Вариант 2.2. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 27$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 36$.

(а) Какие значения может принимать b?

(б) Какие значения может принимать a?

Вариант 2.3. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 8$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 54$.

(а) Какие значения может принимать b?

(б) Какие значения может принимать a?

Вариант 2.4. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 45$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 60$.

(а) Какие значения может принимать b?

(б) Какие значения может принимать a?

Задача 3.1. На окружности отмечены 20 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 20. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Вариант 3.2. На окружности отмечены 12 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 12. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Вариант 3.3. На окружности отмечены 14 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 14. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Вариант 3.4. На окружности отмечены 18 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 18. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Задача 4.1. Найдите все натуральные числа n, для которых оба числа $n+12$ и $n+45$ являются точными квадратами.

Вариант 4.2. Найдите все натуральные числа n, для которых оба числа $n+20$ и $n+59$ являются точными квадратами.

Вариант 4.3. Найдите все натуральные числа n, для которых оба числа $n+5$ и $n+32$ являются точными квадратами.

Вариант 4.4. Найдите все натуральные числа n, для которых оба числа $n+6$ и $n+61$ являются точными квадратами.

Задача 5.1. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 3$ и $AC = 4$ провели биссектрису AD. Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Вариант 5.2. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$ и $AC = 5$ провели биссектрису AD. Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Вариант 5.3. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$ и $AC = 6$ провели биссектрису AD. Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Вариант 5.4. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 6$ и $AC = 7$ провели биссектрису AD. Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Задача 6.1. Последовательность задана условиями $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n.

(а) Найдите a_{2026}.

(б) Найдите сумму первых 2026 членов последовательности.

Вариант 6.2. Последовательность задана условиями $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n.

(а) Найдите a_{2030}.

(б) Найдите сумму первых 2030 членов последовательности.

Вариант 6.3. Последовательность задана условиями $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n.

(а) Найдите a_{2018}.

(б) Найдите сумму первых 2018 членов последовательности.

Вариант 6.4. Последовательность задана условиями $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n.

(а) Найдите a_{2002}.

(б) Найдите сумму первых 2002 членов последовательности.

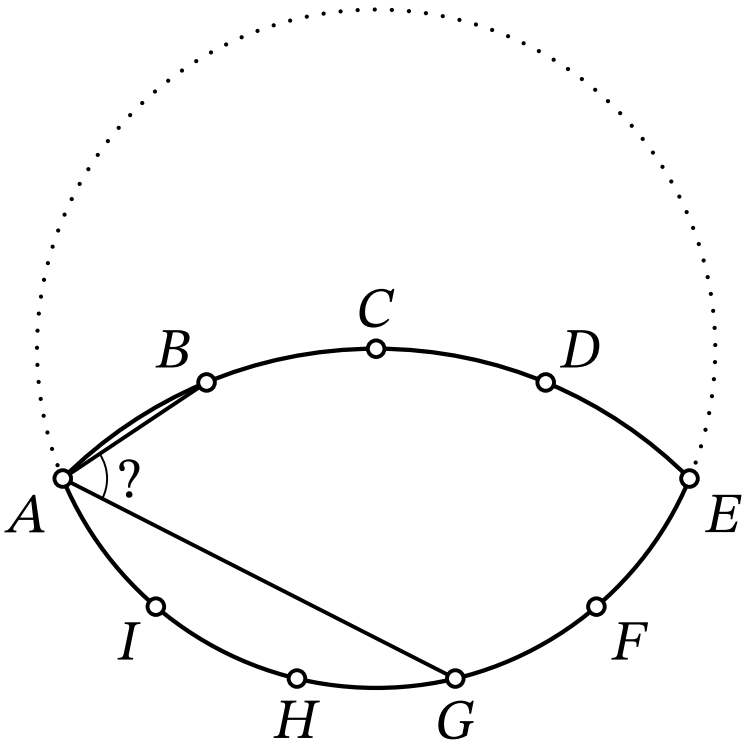
Задача 7.1. Имеется натуральное число N. Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N, не больших 100, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

Вариант 7.2. Имеется натуральное число N. Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N, не больших 80, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

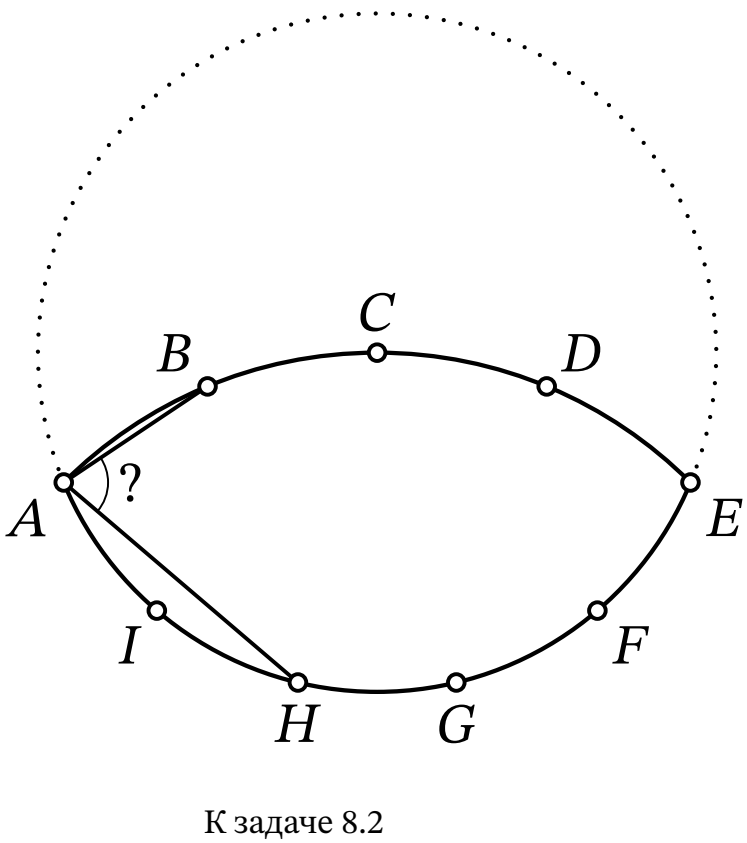
Вариант 7.3. Имеется натуральное число N. Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N, не больших 90, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

Вариант 7.4. Имеется натуральное число N. Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N, не больших 110, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

Задача 8.1. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 12°. Найдите градусную меру угла BAG.



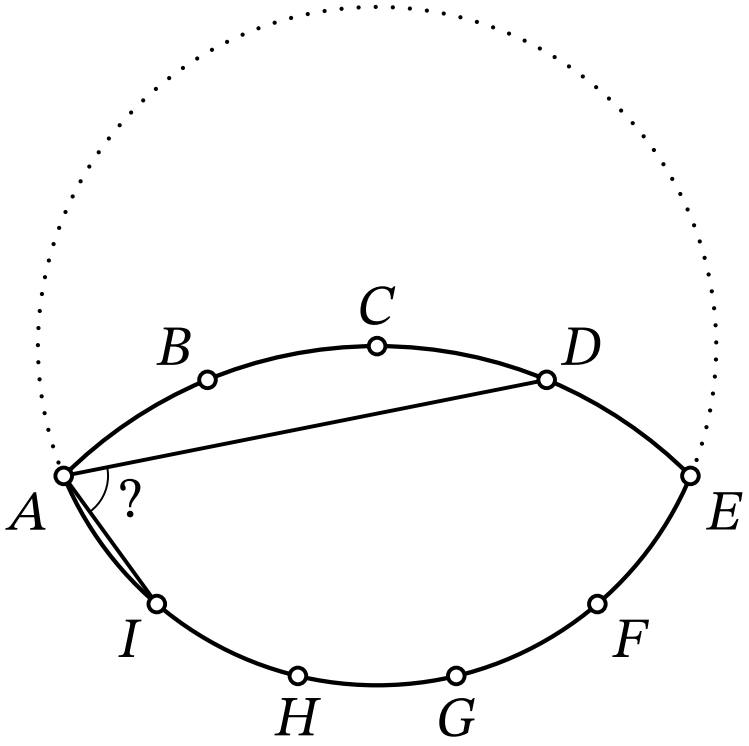
К задаче 8.1



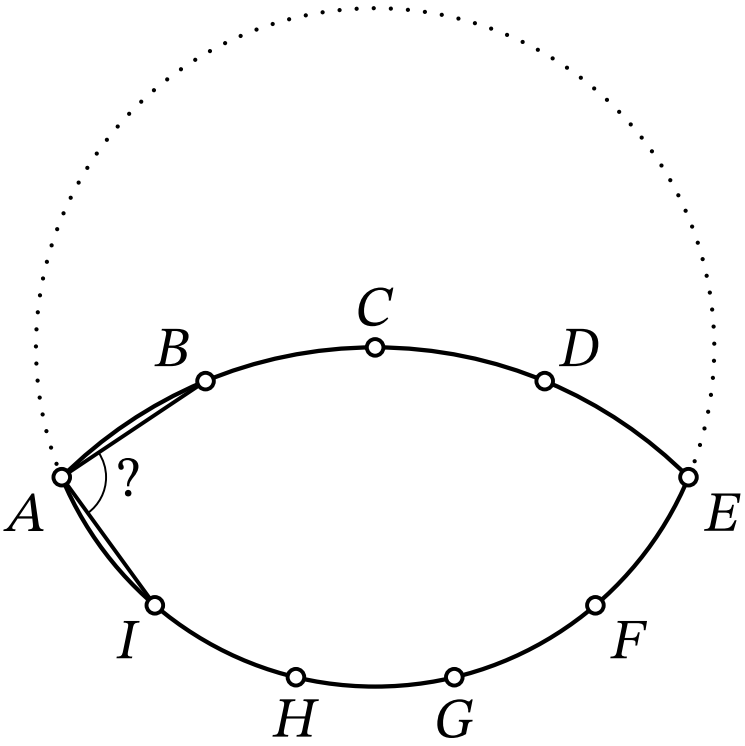
К задаче 8.2

Вариант 8.2. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 5°. Найдите градусную меру угла BAH.

Вариант 8.3. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 19°. Найдите градусную меру угла DAI.



К задаче 8.3



К задаче 8.4

Вариант 8.4. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 9°. Найдите градусную меру угла BAI.