ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2026–2027 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС

Задача 1.1. При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2+5n)^\circ)\cdot\cos((n^2+5n)^\circ)<0?$$

Вариант 1.2. При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2+3n)^\circ)\cdot\cos((n^2+3n)^\circ)<0?$$

Вариант 1.3. При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2+7n)^\circ)\cdot\cos((n^2+7n)^\circ)<0?$$

Вариант 1.4. При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2+11n)^\circ)\cdot\cos((n^2+11n)^\circ)<0?$$

Задача 2.1. Последовательность задана условиями

$$a_1=1,\qquad a_{n+1}=\frac{a_n}{1+3a_n}\quad\text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{100}.

Вариант 2.2. Последовательность задана условиями

$$a_1=1,\qquad a_{n+1}=\frac{a_n}{1+3a_n}\quad\text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{200}.

Вариант 2.3. Последовательность задана условиями

$$a_1=1,\qquad a_{n+1}=\frac{a_n}{1+3a_n}\quad\text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{250}.

Вариант 2.4. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n} \quad \text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{150}.

Задача 3.1. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 15, а их медиана равна 18. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Вариант 3.2. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 20, а их медиана равна 23. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Вариант 3.3. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 17, а их медиана равна 20. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Вариант 3.4. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 22, а их медиана равна 25. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Задача 4.1. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 4, а $SC = 2$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS. Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP.

Вариант 4.2. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 10, а $SC = 5$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS. Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP.

Вариант 4.3. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 2, а $SC = 1$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS. Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP.

Вариант 4.4. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 8, а $SC = 4$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS. Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP.

Задача 5.1. Для каких натуральных значений m уравнение $x^2 - (m+5)x + 3m = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Вариант 5.2. Для каких натуральных значений m уравнение $x^2 - (m+6)x + 4m = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Вариант 5.3. Для каких натуральных значений m уравнение $x^2 - (m+7)x + 5m = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Вариант 5.4. Для каких натуральных значений m уравнение $x^2 - (m+9)x + 7m = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Задача 6.1. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×100. Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 99 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

Вариант 6.2. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×120. Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 119 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

Вариант 6.3. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×80. Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 79 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

Вариант 6.4. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×140. Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 139 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

Задача 7.1. В треугольнике ABC $\angle ABC = 53°, \angle BAC = 66°$. Точка M является серединой стороны BC. Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM, пересекает сторону AB в точке P. Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM, пересекает сторону AC в точке Q. Найдите угол APQ. Ответ выразите в градусах.

Вариант 7.2. В треугольнике ABC $\angle ABC = 57°, \angle BAC = 65°$. Точка M является серединой стороны BC. Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM, пересекает сторону AB в точке P. Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM, пересекает сторону AC в точке Q. Найдите угол APQ. Ответ выразите в градусах.

Вариант 7.3. В треугольнике ABC $\angle ABC = 54°, \angle BAC = 67°$. Точка M является серединой стороны BC. Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM, пересекает сторону AB в точке P. Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM, пересекает сторону AC в точке Q. Найдите угол APQ. Ответ выразите в градусах.

Вариант 7.4. В треугольнике ABC $\angle ABC = 55°, \angle BAC = 63°$. Точка M является серединой стороны BC. Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM, пересекает сторону AB в точке P. Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM, пересекает сторону AC в точке Q. Найдите угол APQ. Ответ выразите в градусах.

Задача 8.1. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n + 1) = 8^n + 1$ для $n = 1, 2, 3, 4$. Найдите $P(1)$.

Вариант 8.2. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n + 1) = 8^n + 1$ для $n = 0, 2, 3, 4$. Найдите $P(1)$.

Вариант 8.3. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n + 1) = 8^n + 1$ для $n = 0, 1, 2, 4$. Найдите $P(1)$.

Вариант 8.4. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n + 1) = 8^n + 1$ для $n = 0, 1, 2, 5$. Найдите $P(1)$.